

**Iagttagelsestheoretiske Regninger angaaende Bestem-
melser af Professor, Dr. Jul. Thomsen af Varmefylde og
Vægtfylde for visse Stoffers vandige Opløsninger.**

Af

T. N. Thiele.

(Meddelt i Mødet den 18. December 1891.)

Da Hr. Professor Christiansen i Efteraaret opfordrede mig til at underkaste nogle Iagttagelser af Hr. Professor Julius Thomsen (som findes offentliggjorte dels i Selskabets Skrifter, dels i «Thermochemische Untersuchungen») en Udjevningsregning, greb jeg med Glæde denne Tilskyndelse; thi jeg er overbevist om, at Iagttagelseslæren, der i Form af Sandsynlighedsregning og mindste Kvadraters Methode allerede har været til saa stor Nytte for Astronomien og Statistiken, er bestemt til at gavne de øvrige empiriske Videnskaber i mindst lige saa høj Grad. Jeg søger Grunden til Fysikernes og Kemikernes Tilbageholdenhed overfor Iagttagelseslæren dels i, at de hyppigere møde vanskelige Opgaver, og især i en vis Ensidighed og for stærk Tilbøjelighed til mathematisk Spekulation, som har givet Fremstillingerne af Iagttagelseslæren et mindre heldigt Præg og forhindret den fra at naa sit Maal, at blive det almindelige Grundlag for samtlige empiriske Videnskaber.

Det var mig derfor kært at blive gjort opmærksom paa en Iagttagelsesrække fra det fysisk-kemiske Omraade, som i ganske

fortrinlig Grad egner sig til Exempel paa, hvad Udjevning-regning har til Opgave og Formaal. Thi det, der her bødes, var for det første Iagttagelser af høj og ensartet Nøjagtighed, ledsagede af alle fornødne Oplysninger, saa at Beregneren fritoges for vovelige Gætninger og Kunststykker; desuden ere Lovene for Fænomenerne simple nok til ikke at trætte ved indviklede Formler; og endelig ere de vandige Opløsningers Varmefylde og Vægtfylde, Iagttagelsernes Genstande, øjensynlig saa vigtige og grundlæggende Forhold, at man selv ved en Udfoldelse af hele Iagttagelseslærens Arsenal ikke kan paadrage sig en Beskyldning for at skyde Spurve med Kanoner.

Regnearbejdet har ikke været ubetydeligt; men jeg har kunnet fremme det hurtigt, fordi jeg ikke blot har kunnet tage Hjælp dertil fra nogle ældre og prøvede Regnere, men desuden har haft det Held netop i det Semester at holde Regneøvelser med et usædvanligt flinkt og talrigt Hold af yngre Studenter, der med en fornøjelig Iver og Interesse have gennemført den Del af Arbejdet, Varmefyldens Udjevning, som jeg overdrog til dem.

Udjevningens første Opgave:

Iagttagelsernes foreløbige Beregning til Opdagelse og Fjernelse af saadanne Fejl, som kunne og bør rettes, saavel som Ejendommeligheder, der maa bestemme den øvrige Del af Arbejdet, er i det foreliggende Tilfælde for en væsentlig Del allerede udført af Iagttageren, hvad der ogsaa ubetinget er det heldigste. Iagttagelserne sigte til at give Bestemmelser om de ideelle Begreber Varmefylde og Vægtfylde, men fra først af have de foreligget i en broget Mangfoldighed af kemiske Operationer, Aflæsninger af Thermometre og Barometre, Vejninger og Maalinger, og først gennem en Række paa theoretiske Forudsætninger byggede Beregninger og Korrektioner er der heraf afledet resulterende Iagttagelser i den simple Form af et Tal n , der for hver undersøgt Blanding angiver Forholdet af

Vandets Molekyler til det iblandede Stofs, et Tal q , der repræsenterer den tilsvarende Varmefylde, og et Tal, som jeg vil skrive Q , der ligeledes repræsenterer Vægtfylden. Om Iagttagelseslæren end altid principmæssigt maa tage et vist Forbehold overfor mulige Forvexlinger af slige Repræsentanter med selve de tilsigtede ideelle Begreber, kan man dog vist i vort Tilfælde trygt stole paa den udmærkede Iagttagers omhyggelige Løsning af denne Del af Opgaven.

I en Henseende maa vi dog her fra Iagttagelsernes reducerede Form se tilbage til den oprindelige; nemlig med Hensyn til Fastsættelsen af de enkelte Iagttagelsers «Vægte», eller Forholdet imellem deres Nøjagtighed. Det tør antages at have været Iagttagerens Hensigt tilnærmelsesvis at gøre alle enkelte Iagttagelser af samme Art lige nøjagtige, saaledes at man, naar man betragter Blandingsforholdet n som et fejlfrit Argument, kunde betragte alle Varmefylderne q som lige godt bestemte og ligeledes alle Vægtfylderne Q . Men om denne Hensigt virkelig er opnaaet, eller rettere med hvilken Grad af Tilnærmelse man kan tillade sig at fingere denne Ligeodhed, er næppe helt afgjort ved Iagttagerens almindelige Bemærkninger derom. I Virkeligheden turde Iagttagelsesfejlene kunne henføres til tre Klasser af Fejlkilder. Baade for q og Q vil der for det første være at nævne en Række Bestemmelser af Konstanter og Ejendommeligheder ved de anvendte Apparater, hvis Unøjagtighed kastes over paa Resultatet; i denne Henseende kan man vist uden Betænkelighed forudsætte, at den tilsvarende Del af Middelfejlens Kvadrat er konstant for alle ensartede Iagttagelser. For det andet afhænger Varmefyldebestemmelserne q hovedsagelig af den aflæste Temperaturforskul som nogenlunde omvendt proportional med denne, Vægtfylderne ere ligeledes væsentlig proportionale med en Vægtdifferens; og Nøjagtighederne maa derfor staa i en vis Afhængighed af selve det maalte q og Q og kunne derfor ikke anses for ganske konstante. En tredje Fejlkilde er endelig mulig ved smaa Unøjagtigheder i

Blandingsforholdene eller smaa Ærenheder i de blandede Stoffer; denne Slags Fejl ville væsentlig lægge sig paa Tallene n . For ikke at forvikle Udjevningsregningerne maa Argumenterne n helst behandles som fejlfrie, og dette kan ogsaa betingelsesvis gøres ved at kaste Fejlen over paa q og Q som et tredje Led i Middelfejlsbestemmelserne, men saa bliver dette Led rigtignok ikke konstant, men væsentlig afhængigt af, hvor stærkt disse Tal forandres ved smaa Forandringer i n . Efter alt dette maatte Middelfejlskvadratet λ_2 for hver enkelt Iagttagelse forudsættes at have en i det mindste treleddet Form

$$\lambda_2 = \lambda_2' + \lambda_2'' + \lambda_2''' ,$$

hvor λ_2' kunde antages konstant, λ_2'' for afhængig af $q(Q)$, og λ_2''' for afhængig af $\frac{dq}{dn}$, $(\frac{dQ}{dn})$; i hvert af disse Led maatte der indgaa en ubestemt konstant Faktor, der skulde søges bestemt under Udjevningens Gang, for saa vidt ikke selve Iagttagelsesrækken oplyser disse Omstændigheder. Dersom en saa detaljeret Bestemmelse skulde være bleven nødvendig, vilde der dog næppe have foreligget tilstrækkelig varierede Angivelser. En af Faktorerne eller en fælles Faktor kan Udjevningen bestemme skarpt og uden særlig Vanskelighed, endnu en ubekendt Faktor vilde man for Varmefyldens Vedkommende nok kunde bestemme, dersom det f. Ex. turde forudsættes, at de kontrollerende 7 Iagttagelser med Stof Nr. 1, rent Vand, vare foretagne med Prøver af samme Levering af Stoffet og ligeledes, at de 5 gentagne Iagttagelser af Stofferne Nr. 2 og Nr. 18 vare foretagne med Prøver, tagne ud af samme Blandingsmasse, medens i øvrigt enhver Iagttagelse var anstillet med en særlig og fra de andre uafhængig tilberedt Blanding. Men det offentlig meddelte giver ikke Føje til en saadan bestemt Forudsætning, og efter saa lang Tids Forløb kunne yderligere Oplysninger herom vel ikke ventes. Og endda vilde man komme i Forlegenhed med den tredje ubekendte Faktor. Det er derfor meget heldigt, at vor Udjevning, som vi senere skulle se, ikke kommer i Strid med den

Antagelse, at man i det væsentlige tør betragte alle Iagttagelser i hver Række som lige gode, saaledes som Iagttageren som sagt forudsætter.

Et for Udjevningen ikke uvigtigt Spørgsmaal er, om de enkelte Iagttagelser ere indbyrdes uafhængige, eller om i Mod-sætning dertil visse Omstændigheder, ved at være fælles for nogle iblandt Iagttagelserne, lade den ene Iagttagelses Fejl komme igen i nogle beslægtede Iagttagelser men ikke i alle. Indenfor hver af de to Iagttagelsesrækker foreligger der her næppe nogen Oplysning fra Iagttagerens Side, som kunde indgyde særlig Frygt for slige Afhængigheder, men næppe heller tilstrækkeligt til at afvise enhver Mulighed for, at f. Ex. en Fejl i en Blandings Sammensætning kunde gaa igen i nogle af de andre Opløsninger af samme Stof; man kan f. Ex. ikke af det meddelte se, hvilke Iagttagelser der ere anstillede umiddelbart efter hinanden og hvilke der adskilles ved lange Mellemtider. For en Udjevning bliver det da nødvendigt, men vist ogsaa til-ladeligt at gaa ud fra en almindelig Hypothese om Iagttagel-sernes indbyrdes Uafhængighed indenfor baade Varmefyldens og Vægtfyldens Omraade. Imellem disse to Rækkers tilsvarende Tal maa der derimod paa Forhaand formodes at bestaa en Af-hængighed, eftersom i alt Fald i Regelen samme Blandings-prøver ere blevne anvendte baade til Varmefyldens og til Vægt-fyldens Bestemmelse; og derfor enhver Blandingsfejl, som kan spores i en Iagttagelse af Vægtfylden, maa have fremkaldt en tilsvarende Afvigelse i samme Blandings Varmefylde. Dette er et Punkt, som vi maa have for Øje senere i Afsnittet om Fejl-kritik.

Til denne Udjevningens første og foreløbige Opgave hører endnu Opstillingen af Funktionsformerne for de iagttagne Varme-fylders og Vægtfylders Afhængighed af Argumentet, Blandings-forholdet, n ; og disse Formlers foreløbige Anvendelse, navnlig til Opdagelse og Udskillelse af mulige grove Fejl (Skrivfejl, Trykfejl, o. s. v.).

En theoretisk Formel for $q = q(n)$ og $Q = Q(n)$ haves saavidt vides endnu ikke. Professor Thomsen mener derimod med Rette, at «man let kan udvikle empiriske Formler, der med tilstrækkelig Nøjagtighed udtrykke en Opløsnings Varmefylde som Funktion af den indeholdte Vandmængde» (og det opløste Stofs Varmefylde). Til vor Udjevning og især til dennes Forberedelse vil en saadan Formel være, hvad vi behøve, selv om den her indklamrede Betingelse ikke er opfyldt, men det kommer naturligvis an paa, hvad man forstaar ved en tilstrækkelig Nøjagtighed. Den ærede Iagttager har selv ladet det bero ved at efterregne Iagttagelserne baade af Varmefylde og Vægtfyldens reciproke Tal efter Formlen

$$q(M + vn) - vn = K_n,$$

hvor M betegner det opløste Stofs og $v = 18$ Vandets Molekylvægt, og med at paavise, at K_n overalt er temmelig lille og ikke meget variabel. Herefter skulde altsaa

$$q = \frac{n + (K_n : 18)}{n + (M : 18)}.$$

En af Schüller opstillet Formel

$$q = k \frac{100n + c}{100n + 1}$$

forkastes af Iagttageren, fordi Faktoren k maa være $= 1$, fordi q bliver $= 1$, naar $n = \infty$. Men sættes dette $k = 1$, og opfattes Tallet 100 ikke som en forud given Kontant, kommer man til en Formel

$$q = \frac{n + b}{n + a},$$

hvertil ogsaa den af Iagttageren benyttede Regel vil gaa over, hvis man for at gjøre $\frac{1}{18} K_n$ i Tælleren helt konstant vil opgive Fordringen om, at M i Tælleren nøjagtigt skal være Stoffets Molekylvægt.

Til den samme Formel førtes jeg ved mine første Forsøg paa at finde en til Udjevning brugbar Formel. Idet jeg søgte at bestemme Koefficienterne i en Række

$$\frac{1}{q} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots,$$

efter Varmefyldeiaagttagelserne (ved Interpolation efter Newtons almindelige Formel), viste det sig, at flere Stoffer nødvendigvis vilde kræve Bestemmelse af tre Konstanter, hvad der var noget mere, end der vel turde paabyrdes Udjevningen, men tillige røbede de Tal, jeg fandt for disse Konstanter, a_1, a_2, a_3 , en Tilbøjelighed til at gaa frem efter en geometrisk Række. Var dette rigtigt, maatte man med to Konstanter kunne skrive

$$\frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{a + sn}$$

eller, idet $r = a + 1$,

$$\frac{1}{1 - q} = r + sn,$$

men sættes her

$$r = \frac{a}{a - b} \text{ og } s = \frac{1}{a - b},$$

er dette det samme som

$$q = \frac{n + b}{n + a}.$$

Mendelejeff anvender i «Grundlagen der Chemie» systematisk for Vægtfylde Formler $Q = A + pB + p^2C$, hvor p betegner Procentindholdet af det opløste Stof, $p = 100M : (M + 18n)$. Anvendelsen af p som Argument i Stedet for n kan kun skyldes rent ydre Nemhedshensyn, og Mendelejeff vilde, som det synes, hvis han lejlighedsvis havde fortsat Rækken med en eller flere Addender $+p^3D + p^4E$ i Stedet for at spore Hydratindflydelser, hvor hans «parabolske» 3-leddede Form ikke slaar til, have kunnet bemærke den samme Tendens til geometrisk Rækkedannelse $B : C = C : D = D : E \dots$, som mødte mig ved Forsøget paa at udvikle efter Potenser af $\frac{1}{n}$, og som, naar man endelig vil regne med Procenter, vilde gjøre en hyperbolsk Form $Q = \frac{1 + ap}{1 + \beta p}$ væsentlig fordelagtigere end den parabolske.

For de 18 Stoffer, for hvilke der foreligger mere end en enkelt Iagttagelse, bestemte jeg i Henhold til Formlen $\frac{1}{1-q} = r + sn$ Konstanterne r og s , saaledes at de nøjagtig tilfredsstillende to udvalgte Iagttagelser, og sammenlignede de saaledes vundne Formler for Varmefylden med alle Iagttagelserne. Resultatet var særdeles tilfredsstillende, idet kun en eneste af de 85 Iagttagelser kom i aaben Strid med Formelen. Samme Formel fandtes derefter at tilfredsstillende ogsaa VægtfyldeIagttagelserne. Her røbede der sig dog to Afvigelser. Endnu en eller maaske to Afvigelser viste sig senere under Regningen store nok til i alt Fald at antyde enten grove Fejl eller reelle Afvigelser fra den forudsatte Formel. Alle disse Afvigelser vare dog saa smaa, at det let lod sig forklare, at Iagttageren har overset dem, i det Mindste røbes ingen af dem ved nogen mærkelig Uregelmæssighed i de af Iagttageren beregnede Differenser, som vi her have betegnet med K_n , og Iagttageren har derfor, hvis han ikke har anvendt nogen strengere Regneprøve, været afskaaret fra at opdage dem og kontrollere Spørgsmaalene, som de rejse, ved gentagne eller yderligere tilføjede Iagttagelser.

De 4 sikreste af disse Afvigelser samle sig om at opstille et ret vigtigt Problem. De angaa nemlig kun to Opløsninger, for hvilke altsaa baade Varmefylden og Vægtfylden vise abnorme Forhold, nemlig Stof Nr. 6, Natriumhydrat for $n = 7.5$ og især Stof Nr. 11, Chlorammonium ligeledes for $n = 7.5$. Den samtidige Optræden af Afvigelser baade i Varmefylde og Vægtfylde kunde maaske søges forklaret ved en Blandingsfejl paa Tallet, n , for denne Forklaring taler foreløbig, at Overførelsen af en Fejl fra n til q og Q i disse Tilfælde vilde have haft stærk Indflydelse, fordi Opløsningerne have været meget koncentrerede og Differentialkvotienterne for q og Q med Hensyn til n derfor særlig store.

En anden Forklaring er, at disse Iagttagelser, netop fordi de angaa de mest koncentrerede Opløsninger, betegne en saa-

dan Yderlighed, overfor hvilken Formlen maaske ikke tør betragtes som en tilstrækkelig god Tilnærmelse.

For nærværende Udjevning er det utvivlsomt, at alle disse 4 Iagttagelser maa forbigaa; vi skulle senere (Side 87) se, om Udjevningen kan bidrage noget til at afgøre Valget mellem de to Forklaringsmaader.

Den femte, ikke meget store Afvigelse angaar Stof Nr. 2, Vægtfylde for $n = 20$. Da det er tvivlsomt, om den bør formodes at bero paa en Skrivfejl eller lignende og derfor at skulle medføre Iagttagelsens Forbigaaelse, eller om den snarere er at anse for en usædvanlig stor, tilfældig Iagttagelsesfejl, har jeg indskrænket mig til at svække dens Indflydelse paa Resultatet ved en vilkaarlig Nedsættelse af denne Iagttagelses «Vægt» til $\frac{1}{2}$.

Udjevningens anden Opgave

er Iagttagelsernes Transformation til en mere bekvem og sammentrængt Form. Valget af Transformationerne maa bestemmes efter Egenskaberne ved den Formel, hvorefter Udjevningen foretages, her altsaa for begge Iagttagelsesrækker Formlen:

$$q = \frac{n + b}{n + a}, \quad (1)$$

der har to Konstanter (Elementer) at bestemme, og som ikke er af lineær Form med Hensyn til disse Elementer eller efter disses Elimination vilde give lineære theoretiske Betingelsesligninger mellem de enkelte Iagttagelser. Paa Grund af denne Omstændighed faar Transformationen en dobbelt Opgave, nemlig først at tilvejebringe den lineære Form, dernæst den at erstatte hele Iagttagelsesrækken for hvert Stofs q og Q med to (det mindst mulige Antal) indbyrdes uafhængige transformerede Iagttagelser (frie Funktioner af de oprindelige Iagttagelser), med Angivelse baade af Middelværdi og af Middelfejl for hver af disse, hvilket i Grunden er, hvad man forstaar ved Ordet Udjevning.

Transformationen til lineær Form kræver ikke her som i Almindelighed en Rækkeudvikling ved Differentialkvotienter, beregnede ved Hjælp af foreløbige Værdier for Elementerne. Formlen (1) er som ovenfor vist identisk med

$$\frac{1}{1-q} = r + sn,$$

hvorefter den lineære Form med Hensyn til Elementerne r og s tilvejebringes ved at betragte ikke q selv, men Funktionen

$$o = \frac{1}{1-q}$$

som iagttagen. Denne Del af Transformationen kræver altsaa foruden denne simple Beregning kun en tilsvarende Bestemmelse angaaende disse transformerede Iagttagelsers Nøjagtighed. Da vi have forudsat, at alle Iagttagelserne q vare lige nøjagtige, med et og samme endnu ubekendte Tal λ_2 til Middelfejls Kvadrat, og da efter Transformationsformlen

$$\frac{do}{dq} = \frac{1}{(1-q)^2},$$

ville Middelfejlskvadraterne $\lambda_2(o)$ paa de transformerede Iagttagelser fremgaa ved λ_2 's Multiplikation med $\left(\frac{do}{dq}\right)^2$, altsaa

$$\lambda_2(o) = (1-q)^{-4}\lambda_2.$$

De transformerede Iagttagelser o maa antages at være indbyrdes uafhængige, forsaavidt det samme kan antages om de oprindelige Iagttagelser. At Fejllovene ved Transformationen kunne faa Skævheder og Abnormiteter, som ikke fandtes i de oprindelige Iagttagelser, har her saa meget mindre at sige, som ogsaa selve q 'erne repræsenterer en forud stedfunden Transformation af det egentlig iagttagne (Thermometeraflysninger, Blandingsbestemmelser m. m.); og da Iagttagelsesfejlene i det hele ere smaa, kunne saadanne Abnormiteter, hvis de findes, sikkert ikke have væsentlig Betydning.

Tabellerne i Bilag I meddele Professor Thomsens Iagttagelser efter denne Transformation. Til det fælles Argument, n , svarer en Afdeling for Varmefylden og en anden for Vægt-

fylden med 5 Kolonner i hver, de første af disse give for Varmefylden $\frac{1}{1-q}$ og for Vægtfylden $\frac{1}{Q-1}$ (med Fortegnsskifte for at undgaa talrige — Tegn), den følgende Kolonne i hver Tabel giver den i min Regning forudsatte Nøjagtighedsbestemmelse ved

$$\text{Log } \frac{1}{v} = \text{Log} \left(\frac{\lambda_2(o)}{\lambda_2} \right) = -4 \text{Log}(1-q),$$

henholdsvis $= -4 \text{Log}(Q-1)$. Til Beregning af v skal ikke de iagttagne Værdier for q anvendes, men strengt taget de af Udjevningen fremgaaende; paa Grund af den stærke Afrunding, som allerede paabydes af Tvivlen om λ 's Konstans, har det været aldeles tilstrækkeligt hertil at bruge de allerførst forsøgsvis beregnede Formler.

Angaaende de tre sidste Kolonner se næste Afsnit.

Idet vi nu skulle foretage den anden Del af Iagttagelsernes Transformation, Udjevningstransformationen, er Opgaven den, for hvert Stofs Varmefylde og Vægtfylde at bestemme to (d. e. Elementernes Antal) lineære Funktioner af de transformerede Iagttagelser eller, om man vil, Funktioner af Elementerne r og s , der kunne betragtes, som om de vare indbyrdes uafhængig iagttagne og bestemte med en Fejllov, given ved Middeltal og Middelfejl for hver. Af disse to «frie» Funktioner kan den ene vælges som en hvilkensomhelst lineær Funktion af r og s , derved bestemmes i det væsentlige den anden. Og Regnereglen herfor er, naar alle Valg falder paa et af Elementerne selv, ganske svarende til «de mindste Kvadraters Methodes» velbekendte Regel. Valget skal bestemmes af Hensyn til at faa saa umiddelbar en Bestemmelse som muligt for saadanne Tal, som have særlig theoretisk Betydning eller have været Maal for Iagttagere's Arbejde. Begge Dele gælder nu her om Elementet s . Som theoretisk Formaal optræder her Grænseværdien ved meget svage Opløsninger af Differensen K_n

$$K_n = q(M+18n) - 18n,$$

som, naar $n = \infty$, bliver $K_\infty = M - \frac{18}{s}$, og som altsaa da kun

afhænger af s , ikke af r . Det er derhos aabenbart, at Forholdene ved de stærkt fortyndede Opløsninger, som i det væsentlige alene afhænge af s , har domineret i Iagttagereens Plan. Idet vi da vælge s til vor ene frie Funktion, kunne vi give den anden Form af en til et bestemt Argument N svarende Varmefylde q_N (Vægtfylde) eller bedre $u_N = \frac{1}{1 - q_N} = r + sN$.

Grundligningerne efter «mindste Kvadraters Methode» ere nu

$$\begin{aligned} [vo] &= [v]r + [vn]s \\ [vno] &= [vn]r + [vn^2]s, \end{aligned}$$

hvor [] betegner Summen af den indesluttede Funktion for alle iagttagne Værdier af n . For at bestemme s og den deraf frie Funktion u_N , skal man behandle disse Ligninger ganske som til sædvanlig normal Opløsning først med Hensyn til s og derpaa r . Idet der nemlig først beregnes

$$N = \frac{[vn]}{[v]},$$

hvorefter N altsaa bliver Argumentet til «Vægtenes» Tyngdepunkt, giver den første af disse Ligninger

$$r + Ns = u_N = \frac{[vo]}{[v]}$$

med Middelfejlskvadratet

$$\lambda_2(u_N) = \frac{\lambda_2}{[v]},$$

og multipliceres derpaa denne første Ligning overalt med N , og subtraheres det udkommende fra 2den Ligning, opnaas Elimination af r , og der haves til Bestemmelse af den valgte frie Funktion, s ,

$$[von] - [vo]N = ([vn^2] - [vn]N)s$$

eller

$$[vo(n - N)] = [v(n - N)^2]s,$$

thi efter Ligningen for N er

$$[v(n - N)^2] = [vn^2] - 2N[vn] + N^2[v] = [vn^2] - [vn]N,$$

saaledes bliver Værdien for s

$$s = \frac{[vo(n - N)]}{[v(n - N)^2]}$$

og Middelfejlskvadratet

$$\lambda_2(s) = \frac{\lambda_2}{[v(n-N)^2]}.$$

At herved netop u_N og s blive indbyrdes frie Funktioner af Iagttagelserne, ses let; thi Definitionen paa alle lineære Funktioner, som ere frie af hinanden, er, at, naar de udvikles til Form af lineære Funktioner

$$\left. \begin{aligned} s &= [\sigma_i o_i] \\ u_N &= [\eta_i o_i] \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3 \dots$$

af de enkelte Iagttagelser o_i , Summen $[\sigma_i \eta_i \lambda_2(o_i)]$ forsvinder. Men Iagttagelsen o_i har i u_N og s henholdsvis Koefficienterne

$$\eta_i = \frac{v_i}{[v]} \quad \text{og} \quad \sigma_i = \frac{v_i(n_i-N)}{[v(n-N)^2]}$$

og
$$\lambda_2(o_i) = \frac{\lambda_2}{v_i},$$

og nu er jo

$$0 = \left[\frac{v_i}{[v]} \cdot \frac{v_i(n_i-N)}{[v(n-N)^2]} \cdot \frac{\lambda_2}{v_i} \right] = \frac{\lambda_2}{[v][v(n-N)^2]} [v(n-N)],$$

fordi
$$[v(n-N)] = [vn] - [v]N = 0.$$

Efter disse Formler beregnedes for hvert af de 18 Stoffers Varmefylde og Vægtfylde Værdierne og Middelfejlene for disse frie Funktioner. Kun indførtes til Regningens Lettelse nogle Modifikationer, navnlig regnedes der med Differenser mod den foreløbige Beregnings Resultater, saa at baade Iagttagelserne erstattedes med deres Afvigelser fra de foreløbige Formler og Elementerne med de Rettelser, som skulle føjes til Konstanterne i hine Formler. Varmefyldens Udjevninger regnedes af unge Studerende, hvert Stof en 2 til 4 Gange efter disses simpleste Formler, og kontrolleredes ved indbyrdes Sammenligning. Vægtfylden besørgedes af et Par øvede Regnere ved Enkeltregninger efter udvidede Formler med de i slige Tilfælde brugelige Kontrolligninger. Resultaterne ere: (se Bilag II). Her er altsaa i en saa sammentrængt og for senere Undersøgelser saa bekvem Form som muligt gengivet hele Indholdet af Professor Thomsens Iagttagelser, saa at det ganske skal kunne træde

i Stedet for disse indenfor de Grænser, for hvilke vor Formel $\frac{1}{1-q} = r + sn$ ikke viser kendelig Afvigelse.

Om Bestemmelserne af de konstante Faktorer λ_2 i Formlerne for Middelfejlernes Kvadrater se næste Afsnit.

Med disse frie Funktioner kan man navnlig her udføre enhver Beregning af den til et specielt n svarende Varmefyldte og Vægtfyldte, og dette, hvad enten n er iblandt dem, for hvilke dette umiddelbart er iagttaget, eller ikke. Thi i begge Tilfælde repræsenterer den af de frie Funktioner beregnede udjevnedede Værdi

$$u_n = \frac{1}{1-q_n} = (r + sN) + s(n - N) = u_N + s \cdot (n - N),$$

alt hvad der efter samtlige Iagttagelser kan vides om Forholdet for det specielle n ; og Middelfejlskvadratet paa den udjevnedede Værdi

$$\lambda_2(u_n) = \lambda_2(u_N) + \lambda_2(s) \cdot (n - N)^2$$

vil altid være mindre end det tilsvarende $\lambda_2(o_n)$ for det direkte iagttagne og angive, hvor højt Udjevningen har kunnet drive Nøjagtigheden.

Udjevningstransformationen til de frie Funktioner er kort sagt bestemt til helt at træde i Stedet for Originaliagttagelserne, baade fordi de have en kortere og lettere anvendelig Form end disse og tillige fordi de ere nøjagtigere. Men for at denne deres Bestemmelse skal realiseres, maa det naturligvis først være godtgjort, at de Formler og Forudsætninger, hvorpaa Transformationen er grundet, holde Stik i det enkelte Tilfælde. Dette bliver Genstanden for Iagttagelseslærens tredje Opgave

Fejlkritiken.

Fejlkritikens Grundlag er en paa den forudsatte Formel og de nu fundne frie Funktioner bygget Efterregning af alle de enkelte Iagttagelser og en Beregning af Middelfejlernes Kvadrater efter Udjevningen.

Resultaterne af disse Regninger repræsenteres i vort Tilfælde af de tre sidste Kolonner i Bilag I. Baade for Varmefylden og for Vægtfylden findes her under Overskriften $o-u$ Differensen imellem de iagttagne og beregnede Værdier af $\frac{1}{1-q}$ og $\left(\frac{1}{Q-1}\right)$, saaledes at de udjvnede Værdier u af $\frac{1}{1-q}$ ville findes ved at subtrahere Tabellens tredje Kolonne ($o-u$) fra den første, $o = \frac{1}{1-q}$. Det kunde maaske være ønsket, at Tabellen skulde indeholde en direkte Sammenligning mellem de iagttagne og beregnede Værdier for selve Varmefylden og Vægtfylden. En saadan er ogsaa bleven beregnet og giver unægtelig, paa Grund af den større Ensartethed i de iagttagne q 'ers Middelfejl, et mere anskueligt Billede af Restfejlenes Størrelse; men dels vilde heller ikke dette egne sig umiddelbart til en ganske retfærdig Bedømmelse af Fejlene, dels giver den fjerde Kolonne i disse Tabeller i Virkeligheden Tal, som uden væsentlig Unøjagtighed kunne opfattes som Kvadraterne paa Afvigelserne mellem de iagttagne og beregnede Værdier af q , dels endelig vise de her meddelte Tal $o-u$ ikke blot direkte Afvigelserne i $\frac{1}{1-q}$, men efter Multiplikation med Tallene $\frac{1}{s}$ ogsaa, hvorledes Blandingsforholdet n maatte forudsættes at have været, dersom man ensidigt vilde kaste hele Skylden for Afvigelserne over paa Unøjagtigheden af dette Argument. Naar der saaledes for første Iagttagelse af Natriumhydratets Varmefylde i tredje Kolonne findes Tallet

$$o-u = +0.336,$$

saa viser dette for det første i Forbindelse med Tallet i første Kolonne $\frac{1}{1-q} = 6.536$, at Udjevningen kræver Varmefylden bestemt ved

$$\frac{1}{1-q} = 6.536 - 0.336 = 6.200 \quad (q_u = 0.8387),$$

dernæst findes ved at uddrage Kvadratroden af Tallet 00007647 i fjerde Kolonne med Fortegnet fra tredje, at Afvigelsen mellem den iagttagne og (—) den beregnede Varmefylde er

$$q_o - q_u = +0.0087,$$

medens denne Afvigelse, da den originale Værdi i Professor Thomsens Thermochemische Untersuchungen er $q_0 = 0.847$, burde have været $= + 0.0083$.

Da endelig $\frac{1}{s}$ her er funden $= 3.73$ og $3.73 \cdot 0.336 = 1.255$, viser det sig, at Antagelsen af, at n ikke havde været 7.5 men $7.5 + 1.255 = 8.755$, vilde kunne forklare denne Afvigelse (en af de omtalte særlig store).

Hvad nu først disse allerede i det indledende Afsnit omtalte særlig store Afvigelser angaar, saa viser Sammenligningen med den paa deres Udeladelse byggede Udjevning af de øvrige Iagttagelser, at Uoverensstemmelsen ikke skyldes Mangler ved den foreløbige Regning, men vedblivende bestaar. Afvigelserne i q og Q :

	Varmefylde	Vægtfylde
Natriumhydrat	+ 0.008	— 0.0042
Chlorammonium	+ 0.024	+ 0.0120

ere saa betydelige, at hver enkelt af disse Iagttagelser ved at være bleven medtagen i Udjevningen vilde have nedsat Dommen om Iagttagelsesrækkens Godhed i væsentlig Grad. De bestemte Værdier for Afvigelserne, som nu følge af Udjevningen, kunne til en vis Grad støtte Formodningen om, at Aarsagen turde søges i Fejl i Blandingsforholdene n , vi have jo set, at Natriumhydratets Varmefylde vilde have svaret til $n = 8.755$ i Stedet for $n = 7.5$, for Chlorammoniets Vedkommende ere de tilsvarende Tal 8.773 og 8.989 , og man fristes unægtelig til at søge en fælles Grund til disse indbyrdes hinanden saa lignende Tal. Men da Natriumhydratets Vægtfylde vilde kræve en modsat Forandring af $n = 7.5$ til 7.33 , maatte Forklaringen dog blive meget broget, og da den ikke har fundet Støtte hos Iagttageren, anser jeg det for rigtigt at opgive den.

Om de øvrige Afgigelsers Betydning i det enkelte som i det store tør man som ovenfor berørt ikke dømme umiddelbart efter Differensernes Størrelse, og det selv ikke, om Differensens iagttagne Minuend havde havt samme Middelfejl og Vægt overalt

i Tabellen, saaledes som vi med enkelte Undtagelser have forudsat om q og Q . Thi ogsaa Nøjagtigheden af Differensens andet Led, den udjvnede Subtrahend, spiller en væsentlig Rolle derved. Hæve Udjevningens Resultater sig noget Steds omtrent til Højde med det theoretisk sande, saa at dette saa godt som ubetinget har dikteret Subtrahendens Værdi, uden at den iagttagne Værdi har kunnet paavirke Udjevningen, da kan Differensens Størrelse ikke være kendelig mindre end dens Betydning for Fejlkritiken, men har omvendt hverken Theori eller andre iagttagelser kunnet erstatte en iagttagelse, da maa Udjevningen have bøjet sig helt hen imod en saadan iagttagelse, og selv en lille Differens kan da have en stor Betydning for Fejlkritiken. Jeg har i min alm. iagttagelseslære vist, hvorledes Maalestokken for dette Forhold kan afledes af de enkelte iagttagelsers Middelfejls Kvadrater $\lambda_2(o)$, som de vare før Udjevningen, og $\lambda_2(u)$, som de ere blevne for det tilsvarende udjvnede Tal, og navnlig har jeg der angivet, at

$$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$$

angiver den Maalestok, hvormed den enkelte iagttagelses med Vægten multiplicerede Fejlkvadrat bør vurderes. Som man ser, blive disse Maalestokke næsten = 1, naar Udjevningen kan give et Resultat, der er mange Gange mindre usikkert end den umiddelbare iagttagelses; og omvendt bliver Maalestokken næsten lig med 0 overfor iagttagelser af den modsat yderlige Art, hvor Udjevningen slet ikke har kunnet forbedre eller kontrollere iagttagelsen. Vort Bilag I viser nu i sine femte Kolonner disse Maalestokke for hver enkelt iagttagelse, og selv et flygtigt Blik vil vise, at denne iagttagelsesrække udmærker sig ved at rumme næsten alle Trin paa Skalaen lige fra 0·00 til 0·99. Medens nogle af iagttagelserne helt havde kunnet undværes (især blandt $n = 200$ og 100), er der andre, hvis Angivelser næsten slet ikke ere blevne forbedrede ved Udjevningen (næsten alle de stærkest koncentrerede Opløsninger). For hver naturlig Afdeling

af n Iagttagelser, som selvstændig have bestemt m frie Funktioner, vil overhovedet Summen af Maalestokkene være $n - m =$ det Antal Betingelser, som Afdelingen har været underkastet, og for enhver naturlig eller vilkaarlig Afdeling bør Summen af Afvigelseskvadraterne $(o-u)^2v$ divideret med Summen af Maalestokkene give en Bestemmelse af Middelfejlskvadratet λ_2 paa en saadan Iagttagelse, hvis Vægt er sat som Enhed.

Her er nu for alle Varmefyldebestemmelserne under et

$$\text{Sum af Maalestokkene} = 44,$$

$$\text{Sum af Afvigelseskvadr. ved } \frac{1}{1-q} : \Sigma(o-u)^2v = 0\cdot00015087$$

$$\text{Sum af Afvigelseskvadr. ved } q \text{ selv} : \Sigma(q_0-q_u)^2v' = 0\cdot00016171,$$

følgelig er i Henhold til Afvigelserne paa $\frac{1}{1-q}$ Middelfejlskvadratet paa den enkelte Iagttagelse af $q =$

$$\lambda_2 = 0\cdot00000343$$

eller i Henhold til Afvigelserne paa q selv

$$\lambda_2 = 0\cdot00000368,$$

d. e. en Ubetydelighed større formedelst Fejl fra den ikke absolut exakte Transformation til lineær Form. Middelfejlen selv er altsaa her ± 00185 (± 00192). Hvis man tør betragte de ovenfor omtalte Sammenligninger af Iagttagelserne over rent Vand og Gentagelserne af Bestemmelser med samme n som repræsenterende Iagttagelser af iøvrigt samme Art, men kun frie for Blandingsfejl, saa skulde efter disse Middelfejlene have været $0\cdot00128$, $\lambda_2 = 0\cdot00000164$. Derefter maatte man da slutte, at Blandingsfejlene have givet λ_2 en Tilvæxt af omtrent $0\cdot000002$, svarende til en gennemsnitlig Middelfejl af ± 0014 , hidrørende fra Blandingsfejl, eller omtrent lige saa meget som det, der skyldes den egentlige Varmefyldeoperation.

For Vægtfylden er

$$\text{Sum af Maalestokkene} = 44,$$

$$\text{Sum af Afvigelseskvadr. ved } \frac{1}{Q-1} : \Sigma(o-u)^2v = 0\cdot000004782,$$

$$\text{Sum af Afvigelseskvadr. ved } Q \text{ selv} : \Sigma(Q_0-Q_u)^2v' = 0\cdot000004974.$$

Derefter bliver Middelfjlskvadratet paa den enkelte Vægtfyldebestemmelse, ved Afledelse af $\frac{1}{Q-1}$,

$$\lambda_2 = 0\cdot000000109,$$

ved Q selv

$$\lambda_2 = 0\cdot000000113,$$

altsaa Middelfjlen selv = $\pm\cdot000330$ ($\pm\cdot000333$).

Disse almindelige Resultater harmonere meget godt med, at Iagttageren har skønnet at burde meddele Varmefyldeagttagelserne med 3, Vægtfyldeagttagelserne med 4 Decimaler; Afrundingsfejlene kommer derved ikke til at skade hans Resultater synderligt.

Da vi have udjævnet alle Stofferne efter samme Formel, er det med Hensyn til, om denne tør opfattes som en naturlig Tilnærmelse til den sande Lov, ret vigtigt at opgøre Middelfjlene, saaledes som de fremkomme enkeltvis for Stofferne. For Varmefylden er nu Middelfjlen større end det normale ved 7 blandt de 18 Stoffer, nemlig for Numrene 18, 10, 5, 3, 12, 4 og især 13 (salpetersur Kali); dog i intet Tilfælde dobbelt saa stor. For Vægtfylden overskride 6 af de 18 Stoffer det normale, nemlig Nr. 18, 10, 9, 2 17 og især 14 (salpetersur Ammoniak), det sidste Stof har mere end dobbelt saa stor Middelfjil som normalt. Fordelingen frembyder altsaa intet-somhelst usædvanligt. Og ville vi, for at faa lidt større Tal at operere med i «Maalestokkenes» Summer, samle mere eller mindre ensartede Stoffer i større Grupper, da finde vi følgende to Tabeller, hvis første Kolonne betegner den karakteriserende Atomgruppe, anden Maalestokkens Sum, tredje Varmefyldens og fjerde Vægtfyldens specielle Middelfjil.

<i>H</i>	13	$\pm\cdot0021$	$\pm\cdot00028$
<i>Na</i>	14	15	30
<i>K</i>	7	22	27
<i>Am</i>	8	14	47
<i>Mg</i>	2	21	34

<i>OH</i>	6	$\pm \cdot 0007$	$\pm \cdot 00018$
<i>Cl</i>	13	20	31
<i>NO₃</i>	10	24	38
<i>SO₄</i>	9	13	46
<i>CO₃</i>	1	18	16
Vinsyre	3	22	18
Eddikesyre	2	12	27

heller ikke heri røber sig noget abnormt. De enkelte Stoffer stemme vel ikke lige godt med Formlen, men Forskellen synes at være rent tilfældig.

Grundlaget for en anden prøvet Fordelingsmaade af Iagttagelsernes Afvigelser fra Udjevningen er denne, at hvis den benyttede Formel kun er en Interpolationsformel, der i sin Form maaske afviger betydeligt fra den ideelle Lov, vil de Afvigelser, som have denne Aarsag, kunne ventes at optræde langt stærkere for Argumentet n 's extreme Værdier end midt i Rækken. Det gaar dog ikke vel an at dele ligefrem efter disse Argumenter, thi paa Grund af Stoffernes ulige Opløselighed i Vand betegner det samme n snart meget koncentrerede, snart stærkt fortyndede Opløsninger.

Med Argumentet n varierer iøvrigt ogsaa de Forhold ved Iagttagelserne, som kunde have Indflydelse paa Iagttagelsernes Nøjagtighed, og dette nogenlunde paa samme Maade for de forskellige Stoffer. Som ovenfor sagt er det endnu kun at betragte som et Forsøg, naar vi have antaget Middelfejlen for konstant for alle enkelte Iagttagelser af Varmefylden og ligeledes for Vægtfylden. Ved at inndele Afvigelserne efter n eller paa lignende Maade, maa vi nu faa at se, om denne forsøgsvis Antagelse stemmer eller ikke. Idet hver Afdeling kan give os en Bestemmelse af Middelfejlskvadraterne λ_2 , maa det vise sig, om disse variere som Funktioner af n , eller om de vise den Uforanderlighed, som er en af Forudsætningerne for hele vor Udjevning.

Da nu «Maalestokkene» i Bilag I i det væsentlige følge Forndringerne i n og alle ere meget nær ved 0 for koncentrerede Opløsninger, medens de i Reglen nærme sig til 1 ved de mest fortyndede, har jeg valgt disse «Maalestokke» selv til Inddelingsgrund, og opstillet 4 Grupper, af hvilke den første paa 18 Varmefylder (og Vægtfylder) indbefatter de Tilfælde, hvor Udjevningen kun i ringe Grad har kunnet forandre de iagttagne Tal, og hvor altsaa selve Afvigelserne ligesom Maalestokkene ere meget smaa — at sige, hvis da ikke Udjevningsformlen har afvejet grovt; den anden Afdeling, paa 21 Tilfælde, angaar endnu temmelig koncentrerede Opløsninger, paa hvilke Udjevningen dog har virket med kendelig Styrke; den tredje (20 Tilfælde) repræsenterer fortyndede Opløsninger, hvor Udjevningen vel er stærk men dog ikke endnu eneraadende som i den fjerde Afdeling (21 Tilfælde) med de mest fortyndede Opløsninger, hvor Afvigelserne kunne betragtes næsten ligefrem som Iagttagelsernes sande Fejl, upaavirkede og upaavirkelige af denne og enhver Udjevnings Mangler i lidt mindre Grad, end om de havde været experimentelle Bestemmelser af selve det rene Vands Vægtfylde og Varmefylde. Resultaterne ere

Gruppe	Varmefyldens		Vægtfyldens	
	Sum af Maalestokke	λ_2	Sum af Maalestokke	λ_2
I	0·9	·00000414	0·5	·00000016
II	10·6	·00000477	9·9	·00000009
III	14·6	·00000260	15·1	·00000010
IV	18·9	·00000360	18·6	·00000013

At de i sig selv ret usikre Tal fra første Gruppe stemme saa godt med de øvrige og med de ovenstaaende λ_2 for hele Rækkerne, er Bevis for, at den valgte Udjevningsformel ikke har trykket Iagttagelserne; dog maa det ikke glemmes, at de ofte omtalte forbigaaede Iagttagelser for Natriumhydrat og Chlorammonium, hvis deres Rigtighed skulde bekræftes ved andre Iagttagelser, vilde komme ind i denne Gruppe og deri bevirke

en mangefold Forøgelse af Værdierne for λ_2 , idet de da tillige ville kræve Anvendelsen af en mere kompliceret Udjevning-formel.

Overensstemmelsen mellem Tallene fra Grupperne II, III og især Gruppe IV's Overensstemmelse med de samlede Resultater pg. 89 og 90 kunde ikke ventes bedre, og beviser, at Iagttageren virkelig i tilstrækkelig Grad har realiseret sin Plan om, at alle Enkeltiagttagelserne skulde være lige nøjagtige.

Til vor Udjevnings Forudsætninger hører endnu Antagelsen om, at de enkelte Iagttagelser ere indbyrdes uafhængige. Prøvelsen desangaaende maa væsentlig bygges paa en Betragtning af Fortegnene i Fejltabellerne i Bilag I. Og medens der iøvrigt er omtrent saa mange af de ønskelige Fortegnsskifter, som man tør vente, viser der sig dog her, i Modsætning til vor Forudsætning, nogle ret tydelige Tegn paa systematisk Gang i Fejlene. Paafaldende hyppigt vil man, navnlig ved de Stoffer, hvor der er 5 eller 6 Iagttagelser, se, at Afgangen har samme Fortegn i de to eller tre Iagttagelser med de højeste n . Dette Forhold kan neppe skyldes Mangler ved Udjevningens andre Forudsætninger. Enhver Udjevning-formel, der for $n = \infty$ lader q og Q nærme sig til 1, maa vise det samme Resultat. Det maa antages, at der har existeret nogle Baand, som have knyttet særlig saadanne Iagttagelser sammen, man kan f. Ex. tænke sig det som rent betragtede Vand taget fra samme Beholdning; da disse Iagttagelser angaaende de stærkt fortyndede Opløsninger i det hele kun have liden Indflydelse paa Udjevningen, tør det haabes, at denne Afhængighed mellem Iagttagelserne ikke gør stor Fortræd.

Et lignende Tegn er, at der viser sig en umiskendelig Lighed mellem Fejltabellerne for Varmefylde og Vægtfylde. Ogsaa dette viser Tilstedeværelsen af systematiske Fejl. Men i denne Henseende er Sammenhængen klarere. Disse Afhængigheder forhindre saaledes ikke, at hver af Rækkerne, Varmefylden for sig og Vægtfylden for sig, kunne betragtes som be-

staaende af indbyrdes uafhængige Iagttagelser, og vore Udjevninger kunne af denne Grund anses for paalidelige nok som Grundlag for alle saadanne Beregninger, hvori der indgaar enten Stoffernes Varmefylde eller deres Vægtfylde; kun ikke, hvor baade Varmefylden og Vægtfylden samtidig faa Indflydelse paa Resultaterne (og selv i disse Tilfælde er det nærmest kun Nøjagtighedsbestemmelserne, som maa frygtes at blive upaalidelige). Derhos kan det næppe være tvivlsomt, at Baandene mellem de to Iagttagelsesrækker ere Bestemmelserne af Blandingsforholdene n , hvis mulige Fejl vi i vor Behandling have kastet over baade paa Bestemmelserne af q og af Q . Have Blandingsforholdene havt saa betydelige Fejl, som ovenfor er fundet antydnet, er det ikke underligt, at de to Rækkers Afgivelser ligne hinanden. Under denne Forudsætning er det heller ikke svært at angive en brugbar Udvej. Thi vel er en streng korrekt Udjevning, hvori samtidig baade n og q og Q ansaas for behæftede med Iagttagelsesfejl, forbunden med saa stort et Arbejde, at selv det foreliggende Emnes store Betydning næppe kunde berettige til dets Anvendelse, men en bekvem Udvej kan findes, naar blot en af disse tre Slags Omstændigheder ved Iagttagelserne gennemgaaende kan anses for at være de andre overlegen i Nøjagtighed. Og som det nu synes at vise sig, gælder dette vel ikke, som jeg har forudsat for Sættelsesforholdene n , men derimod vistnok for Vægtfyldebestemmelsen Q . For saa vidt som det, hvad dog det ovenfor sagte om den forkastede Iagttagelse af den mest koncentrerede Natriumhydratopløsning gør tvivlsomt, bestemt tør forudsættes, at altid den samme Blanding har tjent baade til Varmefyldens og Vægtfyldens Iagttagelse, saa vilde jeg, hvis Regningen skulde gøres om, have søgt at undgaa denne Afhængighed ved at behandle Tallene Q for Vægtfylden som fælles Argument baade for n og for q . En saadan Beregning for n vilde være bleven identisk med den foreliggende; men for Varmefyldens Vedkommende kunde der være Grund til at haabe, at en saadan Regning vilde have ført

til bedre og væsentlig nøjagtigere Resultater end de her meddelte, ligesom man ogsaa efter saadan Udjevning med større Tryghed vilde have kunnet kombinere de sammenhørende Værdier af q og n , end nu af q og Q . Jeg har dog ikke udført denne Omregning; thi et Overslag over, hvad Udbytte der i det specielle Tilfælde kunde ventes deraf, har vist mig, at der er visse Uregelmæssigheder tilstede, hvorefter der kun tør ventes en temmelig ringe Forbedring. Værdierne for de frie Funktioners og Formelkonstanternes Middelværdier, ville næsten slet ikke paavirkes reelt, kun Middelfejlene ville blive noget nedsatte for Varmefyldebestemmelserne. Men selv om vi nu ansatte Fejlene lidt for store, kan dette ikke retfærdiggøre en betydelig Forøgelse af vort Arbejde; især fordi alle Middelfejlsbestemmelser overhovedet ere udsatte for at findes mindre ved en Udjevning, end de vise sig virkelig at være, naar andre Iagttagelser tages i Betragtning.

Med den her angivne Begrænsning mener jeg iøvrigt at kunne betragte disse Udjevninger som definitive, baade med Hensyn til, at Udjevningsformlen har vist sig utvungent brugbar, og til, at Antagelsen angaaende ens Nøjagtighed har vist sig holdbar.

Da begge de iagttagne Forhold variere med Temperaturen, og denne ikke har været helt konstant under alle Iagttagelserne, burde der være taget Hensyn hertil under Regningerne; helst saaledes, at vore Formelkonstanter vare blevne udtrykte som Funktioner af Temperaturen, eller ogsaa saaledes, at hver enkelt Iagttagelse ved en beregnet Korrektion var bleven henført til en bestemt fast Temperatur (18° C. er nær ved Gjennemsnittet). Ingen af Delene har her været mulig; men Temperaturvariationerne under Prof. Thømsens Iagttagelser have overalt været saa smaa, at man ret vel kan se bort fra denne Mangel og henføre Iagttagelserne og vore Resultater direkte til Apparatets Middeltemperatur for hvert Stof.

Først naar man ved at kombinere disse Resultater med Iagttagelser, anstillede ved væsentlig forskjellig Temperatur har faaet Formelkonstanternes Temperaturforandringer bestemt, vil det være paa Tiden at revidere vore Beregninger i denne Henseende.

Udjevningens fjerde Opgave.

Den Form af «frie Funktioner», under hvilken den egentlige Udjevnings Transformationer afleverer sine Resultater, har sin store Berettigelse og Vigtighed derved, at disse frie Funktioner have (eller i al Fald bør have) Egenskaber af uafhængige Iagttagelser i samme Grad som de originale Iagttagelser; dermed forbinde de frie Funktioner den Dyd at være et mere sammentrængt, klart og nøjagtigt Udtryk for hele Iagttagelsesrækkens Indhold. Men netop derved kommer Udjevningens frie Funktioner til at indeholde færre umiddelbare Angivelser end de originale Iagttagelser. Og den Valgfrihed, man har overfor de frie Funktioner, tillader vel, at man henlægger det allervigtigste af Iagttagelsernes Formaal (her s og S) til en af de frie Funktioner, men derved bindes saa Valget af de øvrige ved de originale Iagttagelser tilfældige Fordeling saaledes, at de øvrige frie Funktioner i Almindelighed slet ikke have nogen umiddelbar Interesse.

Det bliver derfor atter en Opgave for Udjevningsregningen at meddele detaillerede tabellariske Oversigter over saadanne Konstanter og Funktioner, som kan antages at have større Interesse.

Som alle empirisk bestemte Tal bør disse fremtræde med Angivelse af den tilsvarende Nøjagtighed. Men denne Nøjagtighedsbestemmelse behøver ikke altid at optræde i Form af skarpt angivne Middelfejl. Ved saadanne Tal, som ikke tænkes anvendte til yderligere Beregning af Middelfejl, kan man ofte nøjes med den Antydning af Usikkerhedens Størrelse, som kan lægges i Afrundingens Grad. Enhver Afrunding indeholder

nemlig en Dom om Nøjagtigheden, idet de bortkastede Decimaller dømmes at være uvæsentlige, medens de bevarede erklæres for væsentlige eller dog for ikke uvæsentlige. Afrundingen bidrager selv til at forøge Fejlen i Angivelsen; endog med den strængeste Overholdelse af Reglen om Afrunding til nærmeste hele Ciffer bliver Afrundingens egen Middelfejl dog altid $\sqrt{\frac{1}{12}} = 0.29$ af dette. Idet det sidste Ciffer, der beholdes, bliver lidt usikkert ved Afrundingen, bør dets egen Usikkerhed have været noget større, for at Afrundingen ikke skulde gøre væsentlig Skade; og det er derfor en naturlig Hovedregel, at man ikke ved Afrundingen tør bortkaste alle de Ciffre, som der er mere eller mindre Tvivl om, men at mindst ét usikkert Ciffer skal beholdes for at dække de øvrige; det sidste bevarede Ciffer i et empirisk bestemt Tal, maa derfor forudsættes at være mere eller mindre usikkert, dets Middelfejl at ligge mellem $\frac{1}{2}$ og 3 af dets Enhed. Er Afrundingen foretagen med Omhu, kan man altsaa af selve Ciffertallet hente en Bestemmelse af, hvor stor Middelfejlen vel kan være. Rigtignok er Spillerummet i Middelfejlen lovlig stort — Iagttagelser, hvis Vægte forholder sig som 1 til henved 100 komme jo i samme Klasse — men selv dette kan dog ofte være tilstrækkeligt.

Var Talsystemets Grundtal 10 ikke saa stort og upraktisk valgt, vilde man næsten altid kunne nøjes med Middelfejlens Angivelser gennem Afrundingens Grad. Men ogsaa nu kan man opnaa en ret god Nøjagtighedsangivelse, nemlig ved at vedtage en Skrivemaade, som tillader at indskyde Mellemstadier i Afrundingen (om man vil, en Brug af $\sqrt{10} = 3.0$ til Grundtal). I dette Mellemstadium bliver der kun Brug for tre Ciffertegn, f. Ex. 2, 5 og 8, men de maa modificeres saaledes, at de let kunne kendes fra de tilsvarende normale Ciffre. Dette giver mig da Ideen til følgende Forslag om Afrundingsregler, som ville findes anvendte overalt i dette Skrift.

Naar der ved Afrundingen skal betegnes, at Usikkerheden paa en vis Plads, nte Decimal er stor — Middelfejlen mellem

$10^{\frac{1}{4}} = 1.8$ og $10^{\frac{3}{4}} = 5.6$ Enheder — gøres dette *n*te Decimal til det sidste og afrundes paa sædvanlig Maade til nærmeste hele Enhed.

Ellers, altsaa naar det skal betegnes, at Usikkerheden paa *n*te Decimal er lille ($10^{-\frac{1}{4}} = 0.6 < \sqrt{\lambda_2} < 10^{\frac{1}{4}} = 1.8$), medens den, henført til *n* + 1te Decimal, vilde være for stor (6 à 18 Enheders Middelfejl) til, at en skarp Ansættelse af dette kunde forsvares, da ansættes ikke blot *n*te og tidligere Decimaler skarpt, men paa *n* + 1te Decimals Plads sættes med modificeret Skrift et af Tallene:

2	for	Intervallet	fra	0.0	til	0.33	af	<i>n</i> te	Decimal
5	»	»	»	0.33	til	0.67	»	»	
8	»	»	»	0.67	til	1.00	»	»	

Modifikationen kan i Talskrivningen udføres ved at gøre Tegnene mindre og lavere end de øvrige. I Tryk vil der her findes Prøver paa Anvendelse af afvigende Taltegn og faldende under de andres Linie. Hvor altsaa Øjet møder saadanne Taltegn paa bageste betydende Plads, er det at forstaa saaledes, at der kun tilkommer disse Ciffre en grumme ringe direkte Betydning, og at det nærmest foregaaende Ciffer endnu har en Usikkerhed af lidt mere eller mindre end en Enheds Middelfejl. Hvor Tallene derimod ende uden noget modificeret Ciffer, betegner dette, at det sidste angivne Ciffer er saa unøjagtigt, at Middelfejlen maa ansættes til lidt mere eller mindre end $3(\sqrt{10})$ Enheder.

Hvor Tallene staa som hele Tal uden Prik og Decimalbrøk efter sig, bliver som bekendt den almindelige Skrivemaade for Afrundingen flertydig, 1000 kan være paalideligt enten paa Enere, Tiere, Hundreder eller kun paa selve de Tusinde. Det vilde paa mange Omraader medføre større Klarhed, om man kunde blive enig om altid at skrive de Nuller paa afvigende Maade, som uden at skulle give nogen selvstændig Bestem-

melse blot maa skrives for at fylde Pladserne. Og her som Led i Betegnelsessystemet for Usikkerhed og Middelfejl bliver det aldeles nødvendigt at indføre ogsaa denne Forandring ved Siden af den foreslaaede. Da jeg med Flid har undgaaet at tage Nullet med iblandt de rudimentære Taltegn, er dette ogsaa let nok, man behøver blot at modificere det kun udfyldende Nul paa samme Maade som de tre andre Tegn.

Men ligesom det maaske ikke er helt overflødigt at bemærke, at de forangaaende Nuller i en Decimalbrøk mellem Prikken og de andre betydende Ciffre ere virkelige Bestemmelser og ikke blot Fyldekalk, saaledes maa det samme ogsaa gælde, hvor man finder sig foranlediget til at indlede Angivelsen af et helt Tal med et Nul paa forreste Plads. I disse Tilfælde maa den sædvanlige Form og Størrelse anvendes for disse Nuller.

Til Exempel vil et og samme Tal 247·386 være at skrive paa følgende Maader for at betegne, at dets Middelfejl har den med Tilføjelsen \pm betegnede Størrelse:

247·386	$\pm 0\cdot003$
247·385	$\pm 0\cdot01$
247·39	$\pm 0\cdot03$
247·38	$\pm 0\cdot1$
247·4	$\pm 0\cdot3$
247·5	± 1
247	± 3
248	± 10
250	± 30
250	± 100
200	± 300
0200	± 1000
0000	± 3000

Vor gradvise Afrunding svarer, som man ser, til Angivelser af Cifferantallet i Middelfejlens Kvadrat λ_2 . Er Middelfejls-

kvadratet givet ved sin Logarithme, og betegnes det hele Tal, som ligger denne nærmest, med $\{L \lambda_2\}$ vil $\frac{1}{2}(\{L \lambda_2\} - 1)$, hvis dette Tal er positivt, angive Antallet af kun udfyldende Nuller paa Pladserne for Enere, Tiere o. s. v., idet et modificeret Taltegn ${}_2, {}_5$ eller ${}_8$, regnes for et halvt Udfyldningsnul. Er derimod $-\frac{1}{2}(\{L \lambda_2\} - 1)$ positivt, angiver dette Tal Antallet af de Decimaler, der skulle skrives efter Prikken, idet et modificeret Taltegn her regnes for en halv Decimal.

Grundlaget for alle strenge Beregninger efter disse Iagttagelser vil være de Pg. 83 fl. angivne frie Funktioner, der kunne betragtes som Konstanter i Formlerne.

$$\frac{1}{1-q} = (r + sN) + s(n - N),$$

$$\frac{1}{Q-1} = (R + SN) + S(n - N);$$

navnlig maa disse Formler anvendes i enhver Regning, som skal gøre Rede for Resultatets Nøjagtighedsgrad. For Middelfejl af q haves saaledes først

$$\lambda_2 \left(\frac{1}{1-q} \right) = \lambda_2 (r + sN) + (n - N)^2 \lambda_2 (s),$$

derpaa

$$\sqrt{\lambda_2(q)} = (1 - q)^2 \sqrt{\lambda_2 \left(\frac{1}{1-q} \right)}$$

og analogt for Q 's Middelfejl.

Efter disse Formler ere saaledes de i Bilag III meddelte ret udførlige Tabeller udregnede med Benyttelse af de fundne Værdier for disse Konstanter, idet der først er afrundet paa Tabeltallene. Foruden at disse tjene som Exempel paa den ovenfor omtalte anskuelige Maade at angive Middelfejlene ved Afrundingen, kunne de forhaabentlig gjøre middelbar og umiddelbar Nytte paa flere Maader. Selvfølgelig ere de dog kun paalidelige inden for de Grænser, for hvilke Udjevsningsformlens Rigtighed kan anses for bevist. Medens der i denne Henseende ikke synes at være Grund til Frygt, hvor Tabellerne kunne anses som Interpolationer mellem de iagttagne Tal, og det

theoretiske Datum, at for $n = \infty$ er $q = Q = 1$, maa man være varsom i denne Henseende overfor saadanne Opløsninger, der ere mere koncentrerede end Iagttagerens Begyndelsestal, hvor Tabellen beror paa en ret betænkelig Extrapolation.

En Streg gennem Tabellen markerer denne Grænse. Tabellerne ere ikke fortsatte ned til lavere Værdier af n end saadanne, som svare til vel konstaterede Hydrater, navnlig saadanne, der kunne udkrystallisere ved nogenlunde nærliggende Temperaturer. Og allerede henimod de derved betegnede Grænser maa der ventes betydelige Afvigelser, fordi Formlen, hvorefter der her er udjevnet, ganske sikkert ikke vil kunne fremstille de sammensatte Forhold, som slige Hydratdannelser fremkalde. Endvidere ere Tabellerne for Natriumhydratet og Chlorammoniet afbrudte ved de Iagttagelsesværdier, der afvige fra Udjevningen.

Som simple Formler maa først og fremmest nævnes.

$$\frac{1}{1-q} = r + sn, \quad \frac{1}{1-Q} = R + Sn,$$

med de numeriske Koefficienter

	r	s	R	S
Svovlsyre	1·075	·225	— ·745	— ·2745
Salpetersyre	1·85	·245	— 1·20	— ·529
Chlorbrintesyre	1·22	·278	— 2·12	— ·988
Vinsyre	2·02	·192	— 1·498	— ·2652
Natriumhydrat	4·2	·268	— 1·00	— ·393
Kaliumhydrat	2·3	·192	— ·98	— ·343
Ammoniumhydrat	— 3·00	20·	— 8·	+ 2·9
Chlornatrium	2·38	·241	— 1·05	— ·430
Chlorkalium	1·58	·172	— 1·14	— ·379
Chlor Ammonium	1·78	·272	— 3·9	— 1·122
Salpetersurt Natron	2·42	·193	— ·885	— ·3158
Salpetersurt Kali	2·15	·153	— ·95	— ·288
Salpetersur Ammoniak	2·07	·247	— 2·06	— ·566
Kulsurt Natron	4·7	·098	— ·85	— ·1598

	r	s	R	S
Svovlsurt Natron	3·1	·095	— ·85	— ·1392
Svovlsur Ammoniak	2·28	·110	— 2·25	— ·215
Svovlsur Magnesia	1·90	·101	— ·508	— ·1492
Eddikesurt Natron	3·5	·255	— 1·72	— ·417

Mere direkte og bekvemme og tillige meget skarpe ere
Formlerne

$$q = 1 - \frac{\frac{1}{s}}{n + \frac{r}{s}} \quad \text{og} \quad Q = 1 - \frac{\frac{1}{s}}{n + \frac{R}{S}}$$

eller for de enkelte Stoffer,

	Varmefylde	Vægtfylde
Svovlsyrens	$= 1 - \frac{4\cdot44}{n + 4\cdot78}$	$= 1 + \frac{3\cdot645}{n + 2\cdot71}$
Salpetersyrens	$= 1 - \frac{4\cdot08}{n + 7\cdot55}$	$= 1 + \frac{1\cdot892}{n + 2\cdot25}$
Chlorbrintesyrens	$= 1 - \frac{3\cdot62}{n + 4\cdot4}$	$= 1 + \frac{1\cdot012}{n + 2\cdot15}$
Vinsyrens	$= 1 - \frac{5\cdot22}{n + 10\cdot5}$	$= 1 + \frac{3\cdot768}{n + 5\cdot65}$
Natriumhydratets	$= 1 - \frac{3\cdot75}{n + 15\cdot5}$	$= 1 + \frac{2\cdot545}{n + 2\cdot55}$
Kaliumhydratets	$= 1 - \frac{5\cdot2}{n + 12}$	$= 1 + \frac{2\cdot91}{n + 2\cdot85}$
Ammoniumhydratets	$= 1 - \frac{0\cdot5}{n - 10}$	$= 1 - \frac{0\cdot34}{n - 2}$
Chlornatriets	$= 1 - \frac{4\cdot15}{n + 9\cdot9}$	$= 1 + \frac{2\cdot328}{n + 2\cdot45}$
Chlorkaliets	$= 1 - \frac{5\cdot82}{n + 9\cdot2}$	$= 1 + \frac{2\cdot642}{n + 3\cdot02}$
Chlorammoniets	$= 1 - \frac{3\cdot68}{n + 6\cdot6}$	$= 1 + \frac{0\cdot892}{n + 3\cdot4}$
Salpetersurt Natrons	$= 1 - \frac{5\cdot18}{n + 12\cdot5}$	$= 1 + \frac{3\cdot168}{n + 2\cdot82}$
Salpetersurt Kalis	$= 1 - \frac{6\cdot5}{n + 13\cdot8}$	$= 1 + \frac{3\cdot47}{n + 3\cdot3}$
Salpetersur Ammoniaks	$= 1 - \frac{4\cdot05}{n + 8\cdot4}$	$= 1 + \frac{1\cdot765}{n + 3\cdot63}$
Kulsurt Natrons	$= 1 - \frac{10\cdot2}{n + 48}$	$= 1 + \frac{6\cdot25}{n + 5\cdot5}$

	Varmefylde	Vægtfylde
Svovlsurt Natrons	$= 1 - \frac{10.5}{n+32}$,	$= 1 + \frac{7.18}{n+6.2}$
Svovlsur Ammoniaks	$= 1 - \frac{9.1}{n+22}$,	$= 1 + \frac{4.64}{n+10.4}$
Svovlsur Magnesias	$= 1 - \frac{9.85}{n+18.5}$,	$= 1 + \frac{6.70}{n+3.42}$
Eddikesurt Natrons	$= 1 - \frac{3.9}{n+14}$,	$= 1 + \frac{2.40}{n+4.2}$

Formler, der vist ere de bedste til theoretisk Brug, men mindre heldige til Beregning, fordi man maa angive flere Ciffre end de paalidelige, hvis man ikke vil tabe i Nøjagtighed, faas ved Sammentrækning af disse til Formerne

$$q = \frac{n+b}{n+a}, \quad Q = \frac{n+B}{n+A},$$

hvor $a = \frac{r}{s}$, $b = \frac{r-1}{s}$, $A = \frac{R}{S}$, og $B = \frac{R-1}{S}$.

Koefficienterne i disse sammenstiller jeg med Blandingernes kemiske Formler (der ogsaa svare til de ovenstaaende Tabeller) og tillige for de iblandede Stoffers Molekyltal, reducerede til Vandet som Enhed, for hvilke vi i det følgende faa Brug:

	a	b	A	B	$M:18$
$SO_3 + nH_2O$	4.78	0.35	2.71	6.36	4.44
$NO_3H + nH_2O$	7.55	3.5	2.25	4.15	3.50
$HCl + nH_2O$	4.4	0.8	2.15	3.15	2.03
$C_4H_6O_6 + nH_2O$	10.5	5.3	5.65	9.42	8.33
$NaOH + nH_2O$	15.5	11.8	2.55	5.08	2.22
$KOH + nH_2O$	12.	7.	2.85	5.75	3.11
$NH_4OH + nH_2O$	-10.	-10.	-2.	-3.	1.94
$NaCl + nH_2O$	9.9	5.8	2.45	4.78	3.25
$KCl + nH_2O$	9.2	3.5	3.02	5.65	4.14
$NH_4Cl + nH_2O$	6.6	2.9	3.4	4.3	2.97
$NaNO_3 + nH_2O$	12.5	7.2	2.82	5.98	4.72
$KNO_3 + nH_2O$	13.8	7.5	3.3	6.8	5.61
$NH_4NO_3 + nH_2O$	8.4	4.3	3.63	5.40	4.44

	a	b	A	B	$M:18$
$Na_2CO_3 + nH_2O$	48·	38·	5·5	11·5	5·89
$Na_2SO_4 + nH_2O$	32·	22·	6·2	13·2	7·89
$N_2H_8SO_4 + nH_2O$	22·	12·	10·4	15·0	7·33
$MgSO_4 + nH_2O$	18·5	8·8	3·42	10·12	6·67
$NaC_2H_3O_2 + nH_2O$	14·	10·	4·2	6·6	4·56

Disse Tabeller og Samlinger af Formelkonstanter kunne foruden den umiddelbare Anvendelse, de maatte kunne faa, ogsaa have Betydning for theoretiske Undersøgelser om Afhængighedernes egentlige Art og Maade. Men ogsaa for Udjevningens egen Skyld kræver Iagttagelseslæren en saadan meget udførlig og varieret Opstilling af Formler og deres Konstanter, forud for Udjevningsarbejdets Afslutning, især naar der som her er bestemt større og sammenhængende Antal af Konstanter. Thi hvis der kan paavises eller udfindes Afhængigheder mellem disse Udjevningsresultater eller mellem dem og andet Steds fra bekendte Tal, saa burde Udjevningen gøres om, fordi man ved at forudsætte saadanne Afhængigheder som givne kunde have sparet endel ubekendte Elementer i Udjevningen. Det er ingenlunde sikkert, at Arbejdet derved vilde være blevet lettere, men man vilde ved Udjevningstransformationen have kunnet trænge Iagttagelserne sammen til et mindre Antal frie Funktioner, og alle Resultaterne vilde derved have vundet i Nøjagtighed.

Hvis der f. Ex. for Varmefylden havde kunnet findes en for alle Stoffer gyldig Afhængighed mellem Tallene a og b og Molekyltallene $M:18$ i sidste Tabel,

$$a = f(b, M),$$

saa burde man, idet man ansaa M 'erne for givne, have indsat saadant Udtryk for a i Formlen for q , og denne vilde da for hvert Stofs Varmefylde kun have krævet et Tal bestemt ved Udjevningen, hvor vi nu have maattet beregne to.

Ret kraftige Antydninger i denne Retning er der virkelig

tilstede. En saadan ligger allerede i den Sammenligning mellem «Molekularvarme» og «Molekularvolumen» og Vandmængden, som Iagttageren har anstillet. Og ved en Betragtning af hver enkelt af Kolonnerne a , b , A og B i vor sidste Tabel fristes man til at tro, at den maatte kunne afledes direkte af Tallene $M:18$; endnu nærmere kan man komme ved at kombinere to eller flere af disse Kolonner, navnlig skal jeg gøre opmærksom paa, at $A + a - B - b$ eller, hvad der er det samme, den skarpere bestemte Sum $\frac{1}{s} + \frac{1}{S}$ fra Tallene i næstsidste Tabels Formler gennemgaaende nærmer sig saa stærkt til et Tal mellem 2 og 3, at der ganske sikkert maa skjule sig en Afhængighed der bag ved. Det er netop ogsaa, fordi jeg tror, at man med noget mere speciel Sagkundskab end jeg har, vil have Udsigt til at udrede saadanne Afhængigheder, at jeg her meddeler saa mange Konstanttabeller.

Umiddelbart anvendeligt for en ny Udjevning har dog intet af alt dette været. De resterende Afvigelser have under alle mine Hypoteser langt overskredet Grænserne for Tallenes Usikkerhed.

Noget videre kommer man ved at efterspore de additive Afhængigheder af de opløste Stoffers kemiske Hovedbestanddele, som man, efter hvad der er blevet mig meddelt, allerede tidligere er blevet opmærksom paa. Naar man blot for Svovlsyrens Vedkommende regner et Molekyl Vand med til det opløste Stof, altsaa der sætter $n - 1$ i Stedet for n , og samtidig forhøjer de konstante Addenter i vore Formler med en Enhed, kunne alle de opløste Stoffer, som her komme i Betragtning, tænkes sammensatte af H , Na , K eller NH_4 paa den ene Side og OH , Cl , NO_3 eller SO_4 paa den anden. Man kan nu for alle vore fire Rækker af Konstanter opstille Formler

$$\frac{1}{S} = A - B = \sigma\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{E}_1\beta,$$

$$\frac{R}{S} = A = \sigma\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{E}_2\beta,$$

$$\frac{1}{s} = a - b = \sigma \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{E}_3 \beta,$$

$$\frac{r}{s} = a = \sigma \mathfrak{B}_4 + \mathfrak{E}_4 \beta,$$

hvor hvert af Tallene \mathfrak{B} og \mathfrak{E} o. s. v. indenfor sin Række repræsenteres af et konstant Tal f. Ex. $\mathfrak{B}_i(Na)$ og $\mathfrak{E}_i(NO_3)$ for dets tilsvarende kemiske Element eller Atomgruppe, og hvor, i Overensstemmelse med Stoffernes Valens, $\beta = 1$ og ogsaa $\sigma = 1$ for OH , Cl og NO_3 , men $\sigma = 2$ for SO_4 . Derved lader der sig opnaa en Overensstemmelse, som i de allerfleste Tilfælde falder indenfor Nøjagtighedsgrænserne.

Naar man for Konstanterne $\frac{1}{S}$ (i Vægtfyldeformlens Tæller) i Formlen $\frac{1}{S} = \sigma \mathfrak{B}_1 + \beta \mathfrak{E}_1$ indsætter de Værdier, som en foreløbig Udjevning har givet mig, nemlig

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{B}_1(H) & = -1.558 & \mathfrak{E}_1(OH) & = +.300 \\ \mathfrak{B}_1(Na) & = -2.851 & \mathfrak{E}_1(Cl) & = +.538 \\ \mathfrak{B}_1(CK) & = -3.179 & \mathfrak{E}_1(NO_3) & = -.322 \\ \mathfrak{B}_1(NH_4) & = -1.444 & \mathfrak{E}_1(SO_4) & = -1.695, \end{array}$$

faar man for hvert af de sammensatte Stoffer en udjevnet Værdi for $\frac{1}{S}$, som tilligemed denne Værdis Afvigelse fra den foregaaende Undersøgelses Resultat vil findes i følgende Tabel med dobbelt Indgang; den udjvnede Værdi øverst og umiddelbart under den dens Afvigelse:

$\frac{1}{S}$	OH	Cl	NO_3	SO_4
H	$\begin{bmatrix} -1.258 \\ +1.258 \end{bmatrix}$	-1.020 $+ .01$	-1.880 $- .012$	$\begin{bmatrix} -4.811 \\ +1.165 \end{bmatrix}$
Na	-2.551 $+ .005$	-2.313 $- .015$	-3.173 $+ .005$	-7.397 $+ .22$
K	-2.879 $- .03$	-2.641 $- .002$	-3.501 $+ .028$	-8.053 $+ .1^1$
NH_4	$\begin{bmatrix} -1.144 \\ +1.48 \end{bmatrix}$	$- .906$ $+ .012$	-1.766 $+ .002$	-4.583 $- .06$

¹⁾ Sammenlignet med en isoleret Iagttagelse.

For Konstanten $\frac{R}{S}$ (i Vægtfyldeformlens Nævner) giver ligeledes Formlen $\frac{R}{S} = \sigma\mathfrak{B}_2 + \beta\mathfrak{E}_2$ ved Indsættelsen af Værdierne

$\mathfrak{B}_2 (H) = 2.290$	$\mathfrak{E}_2 (OH) = - .304$
$\mathfrak{B}_2 (Na) = 2.753$	$\mathfrak{E}_2 (Cl) = - .277$
$\mathfrak{B}_2 (K) = 3.208$	$\mathfrak{E}_2 (NO_3) = + .015$
$\mathfrak{B}_2 (NH_4) = 3.636$	$\mathfrak{E}_2 (SO_4) = + 2.700$,

følgende Tabel over denne Konstants udjvnede Værdier og Afvigelser:

$\frac{R}{S}$	<i>OH</i>	<i>Cl</i>	<i>NO₃</i>	<i>SO₄</i>
<i>H</i>	[1.986]	2.013	2.305	[7.28]
		+ .15	- .05	[- 3.57]
<i>Na</i>	2.449	2.476	2.768	8.21
	+ .08	- .05	+ .05	- 2.2
<i>K</i>	2.904	2.931	3.223	9.12
	- .08	+ .08	+ .05	
<i>NH₄</i>	[3.332]	3.359	3.651	9.97
	[- 6.]	+ .08	- .02	+ .4

For Konstanten $\frac{1}{s}$ (i Varmefyldeformlens Tæller) giver ligeledes Formelen $\frac{1}{s} = \sigma\mathfrak{B}_3 + \beta\mathfrak{E}_3$ ved Indsættelse af Værdierne

$\mathfrak{B}_3 (H) = 3.94$	$\mathfrak{E}_3 (OH) = - .98$
$\mathfrak{B}_3 (Na) = 4.70$	$\mathfrak{E}_3 (Cl) = - .37$
$\mathfrak{B}_3 (K) = 6.20$	$\mathfrak{E}_3 (NO_3) = + .21$
$\mathfrak{B}_3 (NH_4) = 3.92$	$\mathfrak{E}_3 (SO_4) = + 1.25$

følgende Tabel over denne Konstants udjvnede Værdier og Afvigelser:

$\frac{1}{s}$	<i>OH</i>	<i>Cl</i>	<i>NO₃</i>	<i>SO₄</i>
<i>H</i>	[2.96]	3.57	4.15	[9.13]
	[- 2.96]	+ 0.05	- 0.08	[- 4.69]
<i>Na</i>	3.72	4.33	4.91	10.65
	+ 0.02	- 0.15	+ 0.28	+ 0.2

K	5·22 — 0·0	5·83 — 0·02	6·41 + 0·1	13·65 0·0 ¹⁾
NH_4	$\left[\begin{array}{l} 2·94 \\ -2·92 \end{array} \right]$	3·55 + 0·15	4·13 — 0·08	9·09 0·0

For Konstanten $\frac{r}{s}$ (i Varmefyldeformlens Nævner) giver endelig ligeledes Formelen $\frac{r}{s} = \sigma\mathfrak{B}_4 + \beta\mathfrak{E}_4$ ved Indsættelse af Værdierne

$\mathfrak{B}_4(H)$	= 1·74,	$\mathfrak{E}_4(OH)$	= 7·58
$\mathfrak{B}_4(Na)$	= 7·10,	$\mathfrak{E}_4(Cl)$	= 2·92
$\mathfrak{B}_4(K)$	= 6·54,	$\mathfrak{E}_4(NO_3)$	= 5·47
$\mathfrak{B}_4(NH_4)$	= 3·12,	$\mathfrak{E}_4(SO_4)$	= 14·72

følgende Tabel over denne Konstants udjvnede Værdier og Afvigelser:

	$\cdot OH$	$\cdot Cl$	$\cdot NO_3$	$\cdot SO_4$
H	$\left[\begin{array}{l} 9·32 \\ \end{array} \right]$	4·66 — 0·2	7·20 + 0·4	$\left[\begin{array}{l} 18·20 \\ -12·42 \end{array} \right]$
Na	14·68 + 1·0	10·02 — 1	12·57 0·0	28·92 + 5
K	14·12 — 2	9·46 — 0·2	12·01 + 1·8	27·80
NH_4	$\left[\begin{array}{l} 10·70 \\ -2·5 \end{array} \right]$	6·04 + 0·6	8·59 — 0·2	20·95 0

Overensstemmelsen er, som man ser, ikke fuldstændig, der er store Modsigelser i alle 4 Konstanter Tabeller, men den Omstændighed, at disse aabenbare Afvigelser træffe ganske de samme Stoffer (Svovlsyre, Ammoniak og ublandet Vand) i alle Rækkerne og paa en Maade, som i alt Fald ikke udelukker, at disse tre Stoffer kunne tilhøre et og samme fra de andre forskelligt System, forvandler disse Undtagelser til en Slags indirekte Bekræftelser. Ser man bort fra disse tre Tilfælde, er Overens-

¹⁾ Sammenlignet med en isoleret Iagttagelse.

stemmelsen stor nok til, at man bestemt maa afvise den Tanke, at det hele kunde bero paa en Tilfældighed.

De Udjevninger, hvorved Konstanterne \mathfrak{B} og \mathfrak{C} ere bestemte, have kun en foreløbig Karakter, men bringe dog med de nævnte Undtagelser de beregnede Summer \mathfrak{B} og \mathfrak{C} overalt indenfor Usikkerhedsgrænserne for de tilsvarende empiriske Konstanter. Efter Fejlkritikens strænge Love er dette imidlertid ikke tilstrækkeligt. Ligesom ovenfor for hvert Stofs særlige Udjevning, saaledes skal her Afvigelsernes kvalificerede Kvadratsum $[(o-u)^2 v] = [(o-u)^2 \frac{1}{\lambda_2}]$ være Summen af «Maalestokkene». Men denne Sum er for hver Konstants Udjevning $= 12 - 7 = 5$, Forskellen mellem de udjvnede Værdiers og bestemte Elementers Antal, og saa dybt komme disse Kvadratsummer ikke ned, men kun til 16 for $\frac{1}{S}$, til 9 for $\frac{R}{S}$, til 14 for $\frac{1}{s}$ og til 6 for $\frac{r}{s}$, tilsammen altsaa 45 i Stedet for 20. Det iagttagelsestheoretiske Bevis for Rigtigheden af disse Additionstheoremer lader sig altsaa ikke gennemføre. Men paa den anden Side behøve disse Overskridelser ikke at opfattes som Modbevis mod Additionstheoremerne. Man maa i Virkeligheden være forberedt paa en lignende Overskridelse, thi det vilde være meget overraskende, om der ikke i de oprindelige Iagttagelser skulde findes i al Fald et Spor af saadan Afhængighed, som knyttede alle Iagttagelser af samme Stof til hinanden og først løses, naar man fra et Stofs Iagttagelser gaar over til et andet. Og hvis saadanne Afhængigheder existere, vilde de ikke røbe sig ved vore tidligere Udjevninger efter enkelte Stoffer, men her komme til at bevirke netop en saadan Overskridelse som den fundne.

Saavidt jeg kan se, vilde det vist lykkes ret vel at behandle de tolv Stoffer Nr. 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16 og 17 i begge Henseender efter Formler

$$g = 1 - \frac{\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_3}{n + \mathfrak{B}_4 + \mathfrak{C}_4} \quad \text{og analog for } Q$$

med Bestemmelse af ialt 28 Konstanter i Stedet for 48.

Det vilde dog være forhastet allerede nu at indlade sig paa en saadan Udjevning, thi en anden Forklaring af hine Fejlkvadratsummers Overskridelser ligger vist i det mindste lige saa nær. Hvis vor Udjevningsformel $q = \frac{n+b}{n+a}$ ikke er det exakte Udtryk for Loven, men kun en god Tilnærmelse dertil, saa kan det heller ikke ventes, at Additionstheoremerne skulle have mere end en tilnærmet Gyldighed; de gælde muligvis exakt for to Konstanter i den ubekendte exakte Formel, men ikke ganske for deres to Repræsentanter i vor.

Hvor godt end vor Udjevningsformel har tilfredsstillet Iagttagelsesrækkerne, og uagtet dens ret tiltalende Form, tør vi ingenlunde fordre den anerkendt som mere end en indenfor visse Grænser god og gyldig Tilnærmelse. Og som disse Grænser bør vi allerede af Hensyn til, hvad selve denne Regning har bragt for Dagen, betegne de næst laveste Tal for det molekulære Blandingsforhold n , som findes repræsenteret i de Thomsenske Iagttagelser. Medens Formlen sikkert ikke viser nogen kendelig Afvigelse fra dette Tal op til $n = \infty$, maa vi erindre, at det efter de oftere omtalte Forhold, ikke beviser stort, at Iagttagelserne med lavest n stemme saa godt; de have jo næsten været tvungne dertil, eftersom de have været ene om at bestemme den ene af Formlens Konstanter. Og desuden er der jo de to Tilfælde med Natriumhydratets og Salmiakkens Afvigelser for $n = 7.5$. Det turde maaske endog være den mest utvungne Forklaring paa disse, at vi her have at gøre med Tilfælde, hvor Formlen helt har tabt sin Gyldighed og afviger saa stærkt, at den ringe Kraft, hvormed de øvrige Iagttagelser for disse Stoffer kunne gøre sig gældende, dog undtagelsesvis er stor nok til at røbe, hvad der maaske skjult kan være tilstede overfor de mest koncentrerede Opløsninger ogsaa af de andre Stoffer.

At vor Udjevningsformel skulde repræsentere den theoretiske Sandhed, er der altsaa ingen Grund til at haabe; det skulde da være, at der gaves et Stof, som skønt opløseligt i

Vand dog ikke dermed dannede et udpræget Hydrat ved noget bestemt Blandingsforhold. Fra andre Regninger, navnlig angaaende Svovlsyrens koncentrerede Opløsninger, har jeg set saa meget om Hydraternes Indflydelse, at jeg maa antage, at ethvert saadant viser sig baade i Varmefylden, i Vægtfylden og den elektriske Ledningsevne som frembringende en stærkere eller svagere men lokal Perturbation, hvis jeg derved tør betegne en saadan Afvigelse fra det simple Hovedled i Funktionen, som hurtigt taber sig til begge Sider af det til Hydratet svarende Blandingstal, n ; dog saaledes at asymptotisk svindende Spor kunne forfølges ogsaa til de mest forskellige Blandingsforhold, til sidst dog kun som Variationer i de Værdier, man finder for Konstanten i Funktionens Hovedled, alt efter som disse beregnes ved Iagttagelser, der imellem sig indeslutte Hydratet eller ikke. Da det i og for sig er vilkaarligt, hvad man vil forstaa ved Funktionens Hovedled, og Afgørelsen deraf maaske bestandigt vil bero paa et Hensyn til det hensigtsmæssige, kan jeg naturligvis ikke paastaa, at Formlen $\frac{n+b}{n+a}$ for Varmefylden og Vægtfylden er almindelig brugbar til dette Hovedled; men i ingen af de Iagttagelsesrækker, som jeg har faaet at se, er der noget, som modsiger denne Antagelse. Selv Svovlsyrens dybt indgribende Hydrater for $n = 1$ og $n = 2$ forhindre ikke, at denne Formel baade for mindre, mellem-liggende og større Værdier af n kan bringes til at nærme sig stærkt til Iagttagelserne ved smaa Forandringer i de Værdier for Konstanterne, som Iagttagelserne angaaende de fortyndede Opløsninger vilde give, naar de stod alene. Da dette Exempel vil kunne oplyse Sagen paa letteste Maade, skal jeg her anføre de bestemte Tal:

Formlen

$$0.99996 \frac{n + 6.9940}{n + 3.1077} = Q_0,$$

hvori den fra 1 lidt forskellige konstante Faktor er indført af Hensyn dels til Vandets Vægtfylde ved 0°C. , dels til mulig

systematisk Spor af Urenhed i Opløsningsvandet, dels og især til mulige Smaaunøjagtigheder i Reduktionen til 0°C. , giver for de af Mendelejeff samlede og reducerede Iagttagelser følgende Værdier og Afvigelser fra disse:

n	Q_0	Iagttager	Iagttagelse — Q_0
401	1.0096	Marignac	+ 0.0004
		Ostwald	+ 2
201	1.0190	Marignac	+ 2
		Ostwald	+ 1
101	1.0373	Kremers	— 2
		Marignac	— 1
		Ostwald	+ 1
51	1.0723	Kremers	— 7
		Marignac	— 7
		Ostwald	— 6
26	1.1335	Kremers	— 1
		Marignac	+ 2
13 $\frac{1}{2}$	1.2340	Kremers	+ 5
		Marignac	+ 5
11	1.2754	Kremers	+ 9
		Marignac	+ 4
6	1.4266	Kremers	+ 37
		Bineau	+ 50
		Marignac	+ 33
4 $\frac{1}{3}$	1.5222	Kremers	+ 148
		Bineau	+ 148
3 $\frac{1}{2}$	1.5881	Kremers	+ 222
		Bineau	+ 219
3	1.6362	Kremers	+ 298
		Bineau	+ 288
2 $\frac{2}{7}$	1.7020	Kremers	+ 364
		Bineau	+ 360
2 $\frac{1}{9}$	1.7446	Kremers	+ 357

n	Q_0	Iagttager	Iagttagelse $- Q_0$
		Bineau	+ 0.0354
2	1.7608	Kremers	+ 337
		Bineau	+ 332
		Mendelejeff	+ 336
$1\frac{1}{2}$	1.8433	Kremers	0
		Schertel	+ 2
		Lunge & Naef	+ 3
1	1.9460	Marignac	- 931
		Mendelejeff	- 932
$\frac{4}{5}$	1.9945	Winkler	- 870
$\frac{3}{5}$	2.0481	Winkler	- 688
0	2.2505		

Man ser, at Overensstemmelsen lige ned til $n = 6$ er god, og let kunde gøres fuldkommen ved saadan Bestemmelse af Formlens Konstanter, der kun tog Hensyn til denne Del af Iagttagelsesrækken, i en grafisk Fremstilling med n til Abscisse og Differensen $I - Q_0$ til Ordinat, vil denne Del af Kurven falde sammen med Abscisseaxen selv, men fra og med $n = 6$ begynder Perturbationerne fra Hydraterne $n = 2$ og $n = 1$ at vise sig, og de ere, som man vil se, store nok men begrænsede til smaa Intervaller og synes at modvirke hinanden, saa at der har kunnet tilvejebringes fuldstændig Overensstemmelse ved $n = 1\frac{1}{2}$ og Kurven desuden atter nærmer sig til Abscisseaxen henimod $n = 0$ (Svovlsyreanhydridet).

Ved at tegne Kurven for disse Differenser, Iagttagelse $- Q_0$, vil Læseren kunne overbevise sig om, at der slet ikke er nogen Vanskelighed ved kontinuert at føre Kurven gennem alle Iagttagelsernes Punkter. Dette maa vække nogen Forundring, da Mendelejeff netop ved samme Iagttagelsesrække mener at have paavist Diskontinuitet ikke blot ved de utvivlsomme Hydrater $n = 1$ og $n = 2$ men desuden ved $n = 3$ $n = 7$ og $n = c. 150$ (sic!). For saa vidt noget af disse

Hydrater af andre Grunde maa antages at existere, maa man vel vente, at der, naar de sikre Hydraters Perturbationer kunde fjernes ved en finere Undersøgelse, vil vise sig svage Spor af Perturbationer ogsaa for de mindre fremtrædende Hydrater. Men at overhovedet noget Hydrats Perturbation skulde have Form af et Brud paa Kontinuiteten, det er noget andet, hvorfor der ikke blot savnes alt Bevis, men som tvertimod ret tydeligt modsiges af de tilstedeværende Antydninger af, at Hydraternes Perturbationer virke til begge Sider af det tilsvarende n ud til selv de mest afvigende Værdier, om end med rask men jævnt aftagende Styrke. En saadan finere Undersøgelse med Bestemmelse af Funktionernes matematiske Form er for Svovlsyrens Vægtfyldes Vedkommende ikke blot en vanskelig Opgave, men en ligefrem umulig, fordi lagttagelsesrækken her langtfra indeholder Bestemmelser nok for det vigtige Interval mellem $n = 1$ og $n = 2$, og især for Værdierne i disse Hydraters umiddelbare Nærhed. Hvis man tør slutte gennem Analogi fra d'Hrr. Kohlrauch's Bestemmelser om Svovlsyrens Lednings-evne for Elektricitet, er Forholdet adskilligt mere indviklet, end man kunde vente efter Formen af den simpleste Kurve, som kan bestemmes ved de her omtalte lagttagelser af Vægtfylden. Men en egentlig Diskontinuitet turde være udelukket i alle Tilfælde, hvor Temperaturen under Forsøgene har været højere end det paagældende Hydrats Smeltetemperatur.

Udjevningens Slutningsopgave.

Til sidst tilfalder der lagttagelseslæren og enhver større Udjevning den Opgave at vejlede lagttagerne med Hensyn til, hvilke lagttagelser de yderligere bør anstille.

Hovedreglen er selvfølgelig, at det bedste er godt nok, og det bedste betyder her altid flere og atter flere lagttagelser, og saa nøjagtige som muligt hver især. Undertiden, f. Ex. i mange astronomiske Tilfælde, kan man nøjes med denne

Regel i Forbindelse med de ydre tvingende Baand, som lægge sig paa Iagttagelserne.

Men det er ikke altid sagt, at man faar større Nøjagtighed ved flere end ved noget færre Iagttagelser, og derfor kan der blive Tale om at økonomisere med Iagttagelser. De enkelte Iagttagelser kunne nemlig være mere eller mindre heldigt valgte overfor Formaalet og efter den Frihed, man har til at vælge Omstændighederne ved Iagttagelsen, og endelig i Betragtning af den theoretiske Viden, som man forud har vundet.

Er Formaalet et ganske bestemt, da bør Iagttagelsen selvfølgelig rettes saa lige derimod som muligt; i foreliggende Tilfælde tør det f. Ex. antages, at Iagttageren til andre Bestemmelser har behøvet Varmefylde og Vægtfyldeværdier for nogle bestemte, meget fortyndede vandige Opløsninger af Stofferne, og at han derfor fortrinsvis har iagttaget disse. Men er Forholdet et almindeligere og navnlig rettet paa at studere Fænomenernes ubekendte Love, da maa Iagttagelserne spredes, idet de Omstændigheder, man kan beherske, varieres saa meget som muligt. Derfor har Iagttageren gjort vel i at sprede Argumenternes Værdier over ret forskellige Blandingsforhold, hvor han har kunnet ofre mere end en enkelt Iagttagelse paa hvert Stof.

Ud over en vis Grad bør denne Spredning dog heller ikke drives; thi man har Brug netop for Gentagelser for at finde Fejllovstallene, hvorpaa Vurderingen af Nøjagtigheden beror. Ved Udjevningen af Varmefylden have vi kunnet benytte de Gentagelser, som under Iagttagelsesrække Nr. I ere gjorte med rent Vand for at bestemme Kalorimetrets Konstant yderligere til en Middelfejlsbestemmelse, der kunde have faaet stor Betydning, hvis det ikke havde vist sig tilstrækkeligt at anse alle enkelte Iagttagelser for lige gode. Visse andre Gentagelser have kunnet benyttes paa samme Maade.

Naar der i Omstændighederne ved Iagttagelsen ligger en Begrænsning af Valgets Frihed, saa at visse theoretisk ønskelige Iagttagelser blive umulige, saa forstaas det let, at en saa-

dan Grænse bør tiltrække Iagttagelserne til sig under Valget. En saadan Grænse haves her i mange af Stoffernes begrænsede Opløselighed: Blandingerne skulle være flydende. Derfor burde de meget koncentrerede Blandingsforhold have været forholdsvis stærkt repræsenterede. Naar Iagttageren har ment at have fyldestgjort dette Formaal ved at lade Differenserne mellem Argumenterne aftage stadigt og jevnt henimod Grænsen for den stærkeste Koncentration, der turde anvendes, saa viser vor Udjevning, at denne Antagelse ikke har bekræftet sig, derved at «Maalestokkene» for de laveste Værdier af n blive saa smaa, at det bliver indlysende, at disse Iagttagelser maa anses næsten som ganske isolerede og næsten helt maa anvendes til Bestemmelse af en af Formelens Konstanter, medens de kun kontrolleres meget svagt gennem Udjevningen ved de andre Iagttagelser for samme Stof. Under lignende Forhold vil det ikke være overdrevent at kræve, at saadanne Grænseilagttagelser gennemgaaende fordobles, ligesom man i Krigen altid stiller to og to Mand sammen paa Forpost.

Medens det saaledes ofte kan være nyttigt, undertiden næsten nødvendigt at samle Iagttagelserne i Grupper og ikke ubetinget lade den naturlige Frastødningstendens raade imellem Iagttagelserne indbyrdes, er der dog et Tilfælde, hvor Frastødningskraften bliver ubetinget, nemlig naar under visse Omstændigheder det, der kunde gøres til Genstand for Iagttagelse, er exakt bestemt ved Theori eller Definition. Saaledes vides det her, at det rene Vands Varmefylde og Vægtfylde er $= 1$, og som Følge deraf blive alle saadanne Iagttagelser overflødige, hvor Fortyndingen gaar saa vidt, at Blandingen tilnærmelsesvis kan betragtes som rent Vand. Dette forklarer, hvorfor vore «Maalestokke» ovenfor for de fleste Stoffer ved $n = 200$, for mange ved $n = 100$ og for et enkelt endnu ved $n = 50$ viste sig at være saa store, at man ikke vilde have savnet disse Iagttagelser i Udjevningen ved Siden af dem, hvor n var mindre. Absolut overflødige have disse Iagttagelser dog ikke været, de

have ydet mig en lille Lettelse i Regnearbejdet derved, at deres Afvigelser have kunnet betragtes som næsten rene Iagttagelsesfejl. Og endnu en Anvendelse kunne vi gøre af dem, nemlig til at kontrollere Iagttagerens Bestemmelse af Kalorimetrets Konstant. Da denne i det væsentlige optræder som Faktor til de iagttagne Tal, kunne vi som Tilnærmelse til dens Korrektionsfaktor anse det udjvnede Forhold, $q_u : q_0$, af de udjvnede til de iagttagne Tal. Til Sammenligning tilføjes de tilsvarende Tal $Q_u : Q_0$ for Vægtfylden:

		$q_u : q_0$	$Q_u : Q_0$
Stof 2)	$n = 50$	1·001	0·9999
	100	1·002	1·0000
	200	1·001	1·0000
3)	100	·999	1·0000
	200	·998	1·0000
4)	100	1·001	·9999
	200	1·003	·9998
5)	100	1·001	·9999
	200	1·000	·9997
6)	200	1·000	1·0002
7)	200	1·000	1·0000
9)	100	1·000	·9993
	200	1·002	·9997
10)	100	·999	·9998
	200	1·002	·9994
11)	100	·999	1·0000
	200	1·000	1·0000
12)	100	1·004	·9997
	200	1·001	·9996
13)	200	1·004	·9997
14)	100	1·001	·9990
18)	200	1·003	·9996
19)	200	·999	·9997
Middeltal		1·0009	·99978
og deres Middelfejl		\mp ·0004	\mp ·00007

Der er altsaa en lille, men efter Middelfejlen at dømme dog rimeligvis reel Unøjagtighed af 1 pro Mille, som man kunde til-

skrive en Unøjagtighed i Kalorimetrets Konstant. Men da Vægtfyldebestemmelserne mindst lige saa tydeligt vise en tilsvarende konstant Fejl, for hvilken en analog Tydning næppe kan voves, bliver Sagen tvivlsom. Det hele er kun en Bagatel, og det vilde ikke være korrekt at multiplicere vore udjvnede Tabeller med de her fundne Faktorer. Derimod kunde man nok, hvis man havde villet være meget nøjeregnende, have gjort Forskel mellem det anvendte, kun tilnærmelsesvis rene Vand, og det absolut rene, hvis Varmefylde og Vægtfylde definitions-mæssigt er = 1.

Saalænge det iagttagne Fænomens Love eller Iagttagelsernes Love eller begge ere ubekendte, maa man ved Valget af Iagttagelserne nøjes med saadanne almindelige Betragtninger. Men, naar man er kommet ud over det rekognoscerende Standpunkt, naar man kender Iagttagelsesmethodens Fejllov, Formlernes almindelige Skikkelse og har bestemte Formaal for Øje, kan man bestemtere angive, hvorledes en Iagttagelsesrække bør ordnes for at give de ønskede Oplysninger med størst mulig Nøjagtighed og mindst muligt Arbejde baade for Iagttageren og for Beregneren. Derfor bør den iagttagende og regnende Virksomhed helst gaa Haand i Haand med hinanden, og om de end ikke altid behøve at udføres samtidig og af den samme, saa er det dog et abnormt Forhold, naar Iagttagelser vente en Snes Aar paa Beregning, og naar Beregneren mangler speciel Sagskundskab.

Den Iagttager, der overhovedet har et Formaal med sine Iagttagelser, tør ikke afslutte sine Iagttagelser og slaa sig til Ro, førend Beregneren kan sige ham, at der foreligger Iagttagelser nok til deraf at udregne de ønskede Resultater, eller i modsat Fald kan angive, hvilke Iagttagelser der endnu bør anstilles. Og Beregneren kan vel give saadant Svar uden helt at tilendebringe en maaske vidtløftig Udjevning, men ikke uden at have faaet meddelt saa omfattende Prøver af Iagttagelserne, at han kan udfinde det væsentligste, baade ved Fejlloven for

Iagttagelsesmaaden og opstille og foreløbig prøve Formlerne for Fænomenets Lov. Det vil let forstaas, at det kan blive nødvendigt for de to Parter at vexle Spørgsmaal og Svar flere Gange.

Derfor er det ogsaa som oftest alt andet end tilfredsstillende for begge Parter, naar en Regner faar til Opgave at behandle en færdig og afsluttet Række Iagttagelser af en med Udjevning ikke fortrolig Iagttagere, for deraf at skulle udlede Resultaterne. Udjevningens Fejlkritik falder da i Reglen ud til en kritiserende og nedsættende Dom; og Regneren paa sin Side faar Valget imellem enten at erklære sig ude af Stand til at løse sin Opgave, eller at gøre sig skyldig i utilladelige Hypoteser for at fylde Hullerne i Iagttagelserne.

Naar jeg udtaler, at Resultatet i dette Tilfælde er blevet ganske anderledes tilfredsstillende, vil jeg bede den ærede Iagttagere heri at se den største Ros, jeg, der hverken er Kemiker eller Fysiker, har Lov til at yde. Hvad jeg har kunnet og skulde indvende imod disse Iagttagelser, er ikke andet og mere end det, som beviser, at der ikke samtidig med Iagttagelserne ogsaa er sket en foreløbig Udjevning ved Iagttageren selv. Havde disse Skønhedspletter manglet, maatte Konklusionen være bleven denne, at naar en Iagttagere besidder saa fin naturlig Takt som Hr. Professor Thomsen, maatte han uden den almindelige Iagttagelseslæres methodiske Hjælp med et eneste Slag kunne hæve den Sag, han behandlede fra bar Bund, op til en saadan Højde, at hans Iagttagelser kun behøvede at sættes ind i en Regnemaskine for at komme ud deraf som definitive Resultater. Det har overrasket mig, at der ikke manglede mere deri, end der gør; men at dette, der endnu kan ønskes, endda ikke er saa aldeles forsvindende, men virkelig berettiger den almindelige Iagttagelseslæres Krav paa at tale et Ord med ogsaa paa dette Omraade, vil dog formentlig ses, naar jeg nu til Afslutning fingerer, at disse Iagttagelser repræsenterede det første Led under en planmæssig Sammenarbejden af en Iagt-

tager og en Beregner, nemlig den forsøgsvisse Rekognoscering fra førstnævntes Side, og at Iagttagelserne kun foreløbigt vare stillede i Bero, medens den ligeledes foreløbige Udjevning foretoges, hvorefter det nu blev Beregnerens Opgave, at svare med et Forslag til Planen for yderligere Iagttagelser, der endnu kunde være at gøre.

I mit Forslag til en saadan Plan for yderligere Iagttagelser om Opløsningers Varmefylde og Vægtfylde, som Funktioner af det molekulære Blandingsforhold n , vilde jeg da begynde med at erklære, at det ved de foreliggende Iagttagelser maa anses for tilstrækkelig godtgjort, at Formlen

$$q = \frac{n + b}{n + a}$$

gengiver begge Funktioner indenfor Iagttagelsernes Fejlgrænser i alt Fald for stærke Fortyndingsgrader, og tillige for saadanne middelstærke Fortyndinger, ved hvilke der ikke er Spor af Hydratdannelser eller lignende kemiske Virkninger af det opløsende Vand. For de mest koncentrerede Opløsninger kan Formlens Gyldighed derimod ikke anses for bevist ved disse Iagttagelser, som dels overfor denne Yderlighed ere for faa til at kunne kontrollere hinanden indbyrdes, dels endog for et Par Stoffer vise Afvigelser, der turde være reelle, og da kræve en Modifikation af Formlen. For saa vidt denne Formel enten skal søges forbedret eller dens Gyldigheds Omraade udvidet til de koncentrerede Opløsninger, maa de dertil fornødne Iagttagelser hentes især fra de Stoffer, der kunne blandes med Vand i alle Forhold, og desuden maa de øvrige Stoffers mest koncentrerede Opløsninger gøres til Genstand for yderligere Iagttagelser, som for saa vidt de ikke foreligge fra andre, mig ubekendte Sider, navnlig burde mangfoldiggøres i Nærheden af saadanne Blandingsforhold, hvor det vides, at der finder Hydratdannelser Sted.

Fastholdes derimod de fortyndede Opløsningers Under søgelse som det Formaal, der skal søges naaet, enten for andre

Temperaturer og Modifikationer eller med en vis højere Nøjagtighed ved de Iagttagelser, der endnu efter vor Fiktion kunne være at anstille, saa bør Planen lægges saaledes, at Formlen $q = \frac{n+b}{n+a}$ danner Grundlaget, og det saaledes, at begge dennes Konstanter endnu opfattes som helt ubekendte og Genstand for Bestemmelse ved Udjevningen af hvert Stof for sig. Til disse to Konstanter kommer endnu en tredje, nemlig Kalorimetrets Konstant ved de vandige Opløsningers Varmefylde, den tilsvarende mulige konstante Metodefejl ved Vægtfylden eller ved andre Opløsningsvædsker, dennes Varmefylde og Vægtfylden i ren Tilstand.

For at faa disse Bestemmelser udførte med saa faa Iagttagelser som muligt, bør det nu foretrækkes at fordele Iagttagelserne noget anderledes end Professor Thomsen har gjort. Til de sidst nævnte tredje Konstanter Bestemmelse bør nu udelukkende anvendes Iagttagelser over de rene Opløsningsvædsker, og mindst en uafhængig Iagttagelse af disse bør anstilles omtrent for hvert andet Stof, hvis Opløsninger deri skal bestemmes. Af de to andre Konstanter vil den ene med Nødvendighed komme til at afhænge saa godt som udelukkende af Iagttagelsen med den mest koncentrerede Opløsning. I alle saadanne Tilfælde, hvor Professor Thomsen kun har iagttaget mere fortyndede Opløsninger end dem, der senere bør drages ind under Undersøgelsen, bør derfor den mest koncentrerede af Opløsningerne iagttages mindst to Gange, og da enhver Forøgelse af disse Iagttagelsers Vægt vil komme Udjevningens Nøjagtighed til gode i meget vid Udstrækning, skal jeg tilraade, at der ogsaa anstilles nye Dobbeltiagttagelser i saadanne Tilfælde, hvor der allerede fra Professor Thomsens Side foreligger en Iagttagelse med saa stærk koncentreret Opløsning, som der kan være Tale om at anvende, for at ikke Iagttagelserne selv skulle blive upaalidelige eller vor Formel ophøre at være anvendelig. Af Hensyn til den anden Formelkonstant, s , i $\frac{1}{1-q} = r + sn$, som særligt har Indflydelse ved de meget fortyndede Opløs-

ninger, skulde man helst lægge de øvrige Iagttagelser samlede paa en bestemt Fortyndingsgrad, og det ikke paa nogen forholdsvist meget fortyndet Opløsning, som man let kunde forledes til at tro, men paa en middelstærk. Kender man tilnærmelsesvis Formlens Konstanter og ved, hvormange uafhængige Iagttagelser man kan disponere over til dette Formaal, saa kan man opsøge det absolute Maximum for Nøjagtigheden i Bestemmelse af s . Er q_1 den iagttagne Værdi for Varmefylden eller Vægtfylden i den mest koncentrerede Opløsning, hvis molekulære Blandingsforhold antages at være n_1 og haves der for denne ialt v_1 Iagttagelser, og ere de tilsvarende Tal for de Iagttagelser, der skulle gøres med den mere fortyndede Opløsning, q_2 , n_2 og v_2 , da bør man alt efter Værdien af $\frac{v_2}{v_1}$ bestemme q_2 af den tilsvarende af følgende Ligninger:

$$\begin{aligned} \text{For } \frac{v_2}{v_1} = 1 & \text{ bruges } (1 - q_2) = 0.475 (1 - q_1), \\ - & = 2 \quad - \quad (1 - q_2) = 0.457 (1 - q_1), \\ - & = 4 \quad - \quad (1 - q_2) = 0.431 (1 - q_1), \\ - & = 8 \quad - \quad (1 - q_2) = 0.398 (1 - q_1), \end{aligned}$$

og derefter bestemmes saa n_2 ved

$$r + sn_2 = \frac{1}{1 - q_2} \quad \text{eller} \quad s(n_2 - n_1) = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_1)(1 - q_2)}.$$

Dels er dog denne Regel kun anvendelig ved foreløbigt iagttagne og beregnede Stoffer, dels giver den noget forskellige Resultater, eftersom den anvendes paa Varmefylden eller Vægt-

¹⁾ Betegner $\lambda_2(s)$: $\lambda_2 = M$ Forholdet mellem Middelfejlskvadraterne paa den udjævnede Værdi af s og paa den enkelte Iagttagelse, er

$$\frac{1}{M} = \{v_1(1 - q_1)^4 n_1^2 + v_2(1 - q_2)^4 n_2^2\} - N(v_1(1 - q_1)^4 n_1 + v_2(1 - q_2)^4 n_2),$$

hvor $N = \{v_1(1 - q_1)^4 n_1 + v_2(1 - q_2)^4 n_2\} : \{v_1(1 - q_1)^4 + v_2(1 - q_2)^4\}$,

ved $\frac{dM}{dq_2} = 0$ findes heraf som eneste anvendelige Løsning $sn_2 = r + 2sN$,

som ved Elimination af N medfører

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{1 - q_1}{1 - q_2}\right)^4 - 2 \left(\frac{1 - q_1}{1 - q_2}\right)^3,$$

hvorefter ovenstaaende Tabel er beregnet.

fylden. Efter Erfaringerne ved de 18 Stoffer kan det anbefales overfor helt ubekendte Stoffer at følge den ganske simple Regel at gøre $n_2 = 3n_1$, altsaa at tage tre Gange saa meget Vand som i de mest koncentrerede Opløsninger.

Efter de Oplysninger, som Iagttagelsen for $n_2 = 3n_1$ giver, bør saa den eller de følgende Iagttagelser henlægges paa den fordelagtigst mulige Fortynding. Ved Stoffer, for hvilke der ikke foreligger tidligere paalidelige Iagttagelser, kan en vis Spredning af Iagttagelserne n_2 tilraades for at undersøge Formlens Gyldighed for deres Vedkommende; dog bør Grænserne $2n_1 < n_2 < 4n_1$ ikke overskrides uden undtagelsesvis i særlig interessante Tilfælde, eller hvis der lægges særlig Vægt paa Studiet af de mest koncentrerede Opløsninger.

Professor Thomsen har ialt anvendt 94 Iagttagelser paa de 18 Stoffers Undersøgelse eller 5·3 paa hvert, efter denne nye Plan vil der, hvis der kun gøres to Iagttagelser ved n_2 for hvert Stof, anvendes 4·5 Iagttagelser paa hvert; med samme Intensitet i Undersøgelsen vil der altsaa endnu have c. 3 Iagttagelser for hver 4 Stoffer til yderligere Støtte og Kontrol, og hermed kan det saa stilles i Udsigt, at Vægtene for Resultaterne ved den mere økonomiske Fordeling ville findes øgede med 25 til 50 pro Cent.

Af andre Stoffer bør naturligvis først og fremmest de 13, som Professor Thomsen kun har iagttaget for $n = 200$, optages til ny Iagttagelse, især K_2SO_4 og de øvrige 7 Tilfælde KBr , KJ , NJ og $AmBr$, AmJ samt $BaCl_2$ og BaN_2O_6 , som med de 18 danne 4-leddede Grupper af Formen AB , AC , DB , DC og derved kunne tjene til Undersøgelsen af Additionstheoremerne. Andre Kombinationer af denne Art bør derhos opsøges og tilføjes i størst mulige Omfang, for at afgive et rigeligere Materiale til fremtidige Undersøgelser om denne vigtige Sag.

Med Hensyn til Iagttagelsernes Nøjagtighed og indbyrdes Uafhængighed behøver der ikke at foretages væsentlige For-

andringer i Iagttagelsesmaaden. Der bør navnlig ikke foretages en Sondring af Varmefyldens og Vægtfyldens Iagttagelser til to adskilte Rækker, for derved at ophæve den fundne Afhængighed imellem de tilsvarende Tal i de to Rækker. Naar der blot i nye Iagttagelser sørges for, at Vægtfyldevejningerne blive de to andre Angivelser saa overlegne i Nøjagtighed, at de kunne behandles som fejlfrit givne Tal, vil Iagttagelsernes Afhængighed ikke lægge de fremtidige Udjevninger væsentlige Hindringer i Vejen. Dog bør det, at nu ikke længer Blandingsforholdet, men Vægtfyldeangivelsen bør betragtes som Argumentet, hvoraf Varmefylden, q , og det molekulære Blandingsforhold, n , ere Funktioner, fremhæves ogsaa fra Iagttagerens Side. Ingen Iagttagelse bør angives som komplet baade i Henseende til n og q , uden at Bestemmelserne derom angaa samme Blandingsprøve, for hvilken Vægtfylden er bestemt. Skulde en Bestemmelse af q eller n mislykkes, bør den anden Del af Iagttagelsen ingenlunde forkastes, men mangler Vægtfyldebestemmelsen eller giver den blot Anledning til Tvivl, bør hele Iagttagelsen kasseres.

Ved Professor Thomsens Iagttagelser have vi kunnet fastholde Antagelsen af, at Middelfejlene vare lige store for alle Iagttagelser af samme Række, uagtet denne Antagelse strengt taget ikke kan være rigtig. Men dersom det iøvrigt havde været muligt og tilraadeligt at gennemføre en endelig Udjevning i Henhold til Additionstheoremerne, vilde denne have krævet en mere korrekt Bestemmelse af Middelfejlenes Funktionsform og Værdier, som næppe havde kunnet tilvejebringes. Ved de nye Iagttagelser bør der sørges for at medtage, hvad dertil behøves. Det eneste anvendelige Middel er nogle Iagttagelser fuldstændige og andres delvise Gjentagelse. For ikke at spille besværligt Arbejde, bør man indrette disse Gentagelser saaledes, at de komme til Nytte for Nøjagtigheden og altsaa i det mindste tildels henlægge disse Gentagelser til de Led i den

planmæssige Iagttagelsesrække, som af Hensyn til Nøjagtigheden dog bør gentages.

Ved Dobbeltiagttagelserne af de mest koncentrerede Opløsninger kan man, forsaavidt Formaålet ikke skal udvides til specielt at angaa dette Emne, anse Hensigten for opnaaet, naar Gentagelsen giver Sikkerhed mod grove Skrivefejl og lignende. Disse Gentagelser kunne derfor vistnok ordnes saaledes, at de udføres begge Gange med uforandret den samme Blandingsprøve. De komme derved til at give Oplysninger om den konstante Del af Middelfejlskvadratet.

Ved særskilte direkte Forsøgsrækker bør Thermometerangivelsernes Middelfejl søges bestemt, og selve Udjevningen af n som Funktion af Vægtfylden vil formentlig kunne afgive det fornødne til Bestemmelsen af den Del af Varmefyldens Middelfejlskvadrat, som hidrører fra Blandingsforholdet.

De øvrige Gentagelser, som Iagttagelsesplanen byder, kunne derfor anvendes til at skaffe tilnærmede Oplysninger om den Del af Middelfejlskvadraterne, som maa forudsættes at hidrøre fra smaa Urenheder i Stofferne og Opløsningsmidlet, og som ovenfor først kom til at mærkes, da vi skulde benytte Iagttagelser med forskellige Stoffer til Udjevningsbestemmelser af fælles Konstanter. Hovedbetingelsen for at opnaa dette Maal vil være, at det ved hver enkelt Iagttagelse nøjagtigt angives, fra hvilken Tilberedning baade det opløste Stof og Opløsningsvandet hidrører, samt at Fremstillingsmaaden varieres saa meget som muligt, idet det jo gælder om fra forskellige Fremstillinger af samme Stof at slutte sig til Forholdene ved Ombytning med et helt forskelligt Stof. Det skal derved bemærkes, at det i høj Grad vil lette Beregningen, naar Variationerne, der hvor de indføres, gennemføres helt ud, saa at f. Ex. ogsaa en ny Tilberedning af Vandet benyttes, hver Gang der gaas over til en ny Tilberedning af det opløste Stof; medens derimod samme Slags Vand anvendes saa længe, man bliver staaende ved samme Slags Stof. For nogle af de vigtigste Stoffer f. Ex. *Na Cl* bør

vistnok hele Rækken af Iagttagelser efter at være udført med Opløsninger i Forholdene $n = 10$ og $n = c. 30$ og $n = \infty$ af ét Præparat af det rene Salt i én Slags rent Vand, gentages helt igennem alle de samme Forhold med et rent Salt og et rent Vand, der begge ere fremstillede efter en forskellig Methode. For de mindre vigtige og især for de ikke før iagttagne Stoffer kan man benytte den Omstændighed, at man dog ikke

Bilag I.

Varmefylde.

Argument n	$\frac{1}{1-q}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^7 \cdot 1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda^2(o)}$
Nr. 2. Svovlsyre				
5	2'19 ₈	1'37	- '002	4 .12
10	3'33 ₂	1'79 *	+ '005	8 .55
20	5'59	2'69 *	+ '01	3 .56
50	12'1 ₈	4'07 *	- '15	14 .81
100	22'8	5'49	--0'8	24 .97
200	43'	6'66	-3'	15 .99
Nr. 3. Salpetersyre				
10	4'31	2'54	+ '02	9 .07
20	6'6 ₂	3'28	- '12	69 .55
50	14'3	4'52	+ '2	14 .61
100	27'2	5'60	+ '8	13 .83
200	56'	6'70	+5'	45 .94
Nr. 4. Chlorbrintesyre				
10	3'98	2'40	- '01	7 .04
20	6'8 ₈	3'30	+ '12	85 .48
50	14'7	4'68	- '4	27 .66
100	27'8	5'80	-1'2	20 .86
200	48'	6'96	--9'	89 .96

* Iagttagelser med dobbelt Vægt.

kender de gunstigste Blandingsforhold forud, til første Gang kun at tilberede og iagttage Opløsningerne til Dobbeltiagttagelsen med n_1 og den ene Iagttagelse med $n_2 = 3n_1$ i en Slags rent Vand, og saa en anden Dag, efterat Nøjagtighedsmaximum er beregnet, tilføje den eller de øvrige Iagttagelser med Blandingsforholdet n_2 i den ændrede Slags rent Vand, som til den Tid er kommet i Anvendelse.

Vægtfylde.

$\frac{1}{Q-1}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^8$	$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$
<i>SO₃ + nH₂O.</i>				
2'1178	1'30	+ '0005	1	'04
3'484	2'15*	- '005	20	'43
6'28	3'49	+ '04	61	'76
14'45	4'60	- '02	1	'83
28'2	5'80	'0	0	'95
55'5	7'00	- '2	0	'99
<i>NO₃H + nH₂O</i>				
6'485	3'25	+ '002	0	'03
11'75	4'30	- '02	2	'45
27'8	5'70	+ '2	41	'65
54'2	7'00	+ '2	0	'91
106'	8'00	- 1'	0	'96
<i>HCl + nH₂O</i>				
12.02	4'32	'00	0	'02
21'92	5'37	+ '02	0	'42
51'8	6'85	+ '2	1	'70
100'	8'00	- 1.	1	'89
192'	9'22	- 8'	4	'97

* Iagttagelse med halv Vægt.

Varmefylde.

Argument n	$\frac{1}{1-q}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^7$	$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$
Nr. 5. Vinsyre					
10	3'92	2'38	- '01	4	'03
25	6'95	3'37	+ '15	76	'54
50	11'2	4'32	- '4	54	'64
100	20'8	5'38	- '5	6	'84
200	40'	6'51	0'	0	'95
N. 6. Natriumhydrat					
7.5	6'55	3'17*	+ '35	765	
15	8'18	3'70	- '02	0	'08
30	12'3	4'35	+ '1	7	.66
50	17'2	4'96	- '3	13	'62
100	31'2	5'92	+ '2	1	'74
200	59'	7'00	+ 1'	1	'89
Nr. 7. Kaliumhydrat					
30	8'05	3'62	+ '02	0	'07
50	11'9	4'30	0	0	'57
100	21'8	5'35	+ .2	2	'56
200	40'	6'46	- 1'	2	'79
Nr. 8. Ammoniumhydrat					
30	3 00'	10'37	0 00'	0	'03
50	0 800'	11'25	+ 2 00'	2	'42
100	1 000'	12'46	- 1 000'	3	'55
Nr. 9. Chlornatrium					
10	4'78	2'72	- '01	3	'08
20	7'28	3'42	+ '08	32	'70
30	9'52	3'92	- '08	10	'68
50	14'5	4'62	+ '1	1	'73
100	26'2	5'66	- '2	0	'87
200	45.	6'80	- 5'	43	'96

* forbigaaede Iagttagelser.

Vægtfylde.

$\frac{1}{Q-1}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^8$	$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$
<i>C₄H₆O₆ + n H₂O.</i>				
4'15 ₂	2'47	- '002	0	'02
8'14	3'64	+ '01	1	'49
14'7 ₈	4'68	+ '02	0	'67
27'9	5'80	- '1	1	'87
53'8	6'96	- '8	7	'96

NaOH + n H₂O.

3'88 ₂	2'39 [*]	- '066	1809	
6'89 ₅	3'36	+ '002	0	'02
12'79	4'43	'00	0	'54
20'5 ₈	5'26	- '08	3	'64
40'6	6'40	+ '4	5	'84
81'	7'70	+1'	2	'96

KOH + n H₂O.

11'27	4'21	'00	0	'05
18'1 ₈	5'04	+ '05	1	'52
35'2	6'20	- '1	1	'60
69'5	7'38	- '2	0	'84

NH₄OH + n H₂O.

- 82'	7'70	0'	0	'03
-138'	8'52	+ 5'	4	'43
-300'	9'70	-20'	5	'53

NaCl + n H₂O.

5'34 ₂	2'91	- '002	1	'03
9'68	3'94	+ '04	18	'62
13'9 ₂	4'58	- '02	0	'66
22'5 ₂	5'41	- '02	0	'80
42'8	6'57	-1'2	44	'93
85'	7'70	-2'	10	'98

* forbigaaede Iagttagelser.

Varmefylde.

Argument n	$\frac{1}{1-q}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^7$	$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$
Nr. 10. Chlorkalium					
15	4'18	2'48	+ '01	2	'04
30	6'65	3'35	- '08	39	'61
50	10'4	4'07	+ '2	39	'62
100	19'2	5'14	+ '5	13	'80
200	33'	6'28	- 3'	39	'93
Nr. 11. Chlorammonium					
7'5	4'16	2'33 *	+ '34	5574	
10	4'50	2'61	+ '01	1	'02
25	8'42	3'77	- '15	43	'49
50	15'9	4'81	+ '6	50	'67
100	29'5	5'92	+ '5	3	'87
200	55'	7'07	- 2'	0	'96
Nr. 12. Salpetersurt Natron					
10	4'33	2'55	- '01	1	'04
25	7'28	3'46	+ '08	20	'58
50	12'2	4'35	+ '2	12	'63
100	20'2	5'37	- 1'5	116	'82
200	40'	6'47	- 1'	3	'93
Nr. 13. Salpetersurt Kali					
25	5'95	3'10	- '02	8	'04
50	10'12	3'96	+ '28	85	'54
100	17'2	4'96	- '3	8	'60
200	29'	6'05	- 4'	108	'82
Nr. 14. Salpetersur Ammoniak					
5	3'30	2'08	- '00	1	'01
20	7'08	3'36	+ '08	25	'41
50	14'1	4'60	- '4	30	'70
100	26'2	5'66	- '5	5	'88

* forbigaaede lagttagelser.

Vægtfylde.

$\frac{1}{Q-1}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^8$	$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$
<i>KCl + n H₂O.</i>				
6'81 ₂	3'34	- '002	0	'02
12'50	4'40	+ '01	0	'54
20'15	5'22	+ '08	6	'63
38'8	6'40	- '2	2	'85
74'	7'52	-3'	33	'95
<i>NH₄Cl + n H₂O.</i>				
13'93	4'35 *	+1'67	12430	
15'05	4'70	- '02	0	'01
31'8	6'00	'0	0	'45
59'8	7'10	+ '2	0	'69
116'	8'22	0'	0	'88
228'	9'40	-2'	0	'96
<i>NaNO₃ + n H₂O.</i>				
4'042	2'43	'000	00	'01
8'80	3'77	+ '02	5	'44
16'65	4'89	- '02	0	'69
32'2	6'05	- '3	8	'89
62'5	7'22	-1'5	14	'97
<i>KaNO₃ + n H₂O.</i>				
8'14	3'64	'00	0	'02
15'35	4'74	+ '02	1	'46
29'8	5'89	'0	0	'65
57'8	7'10	- '8	4	'88
<i>NH₄NO₃ + n H₂O.</i>				
4'88 ₅	2'76	-- '002	0	'00
13'45	4'52	+ '08	16	'31
30'2	5'94	- '2	3	'77
55'5	7'09	-3'2	81	'92

* forbigaaede Iagttagelser.

Varmefylde.

Argument n	$\frac{1}{1-q}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^7$	$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$
Nr. 15. Kulsurt Natron					
50	9'6 ₂	3'9 ₂	- '0 ₂	1	'04
100	14'9	4'7 ₀	+ '3	16	'50
200	23'8	5'6 ₂	- '8	15	'46
Nr. 16. Svovlsurt Natron					
65	9'2 ₅	3'8 ₅	+ '0 ₂	0	'09
100	12'5	4'4 ₀	- '1	2	'55
200	22'2	5'4 ₀	+ '2	1	'37
Nr. 17. Svovlsur Ammoniak					
30	5'5 ₆	2'9 ₆	'00	0	'10
50	7'7 ₅	3'5 ₅	+ '0 ₂	0	'62
100	13'2	4'4 ₉	- '1	1	'54
200	24'5	5'5 ₅	+ '2	1	'75
Nr. 18. Svovlsur Magnesia					
20	3'9 ₁	2'0 ₇ *	'00	1	'02
50	6'9 ₈	3'0 ₇ *	+ '0 ₅	10	'36
100	12'0	4'3 ₃	'0	0	'74
200	20'8	5'3 ₉	- 1'5	73	'88
Nr. 19. Eddikesurt Natron					
20	8'6 ₂	3'7 ₄	+ '0 ₂	0	'02
50	16'1	4'8 ₃	- '1	2	'49
100	28'5	5'8 ₂	- '5	2	'64
200	59'	6'9 ₂	+ 4'	22	'85

* Iagttagelser med dobbelt Vægt

Vægtfylde.

$\frac{1}{Q-1}$	$L \frac{1}{v}$	$o - u$	$(o - u)^2 v 10^8$	$1 - \frac{\lambda_2(u)}{\lambda_2(o)}$
<i>Na₂CO₃ + n H₂O.</i>				
8'84	3'80	'00	0	'01
16'85	4'92	+ '02	1	'40
32'7	6'05	- '1	2	'59
<i>Na₂SO₄ + n H₂O.</i>				
9'90	3'98	- '01	0	'05
14'82	4'68	+ '05	3	'48
28'6	5'84	- '1	3	'47
<i>N₂H₈SO₄ + n H₂O.</i>				
8'71	3'77	+ '01	4	'07
12'92	4'46	- '08	24	'55
23'8	5'52	'0	0	'56
46'8	6'70	+1'5	41	'82
<i>MgSO₄ + n H₂O.</i>				
3'492	2'17	'000	0	'01
7'98	3'60	+ '01	4	'38
15'42	4'77	- '02	1	'70
29'9	6'00	- '4	16	'91
<i>NaC₂H₃O₂ + n H₂O.</i>				
10'07	4'00	'00	0	'01
22'62	5'40	+ '05	1	'41
43'5	6'52	+ '2	0	'69
83'	7'70	-2'	6	'89

Bilag II.

	2.	3.	4.
	Svovlsyre $SO_3 + nH_2O$	Salpetersyre $NO_3H + nH_2O$	Chlorbrintesyre $HCl + nH_2O$
Midd. Temp. $t =$	17°2 C.	18°1 C.	18°3 C.
Varmefylde.			
s	= 225 ± 0020	245 ± 0056	278 ± 006
$r + sN$	= 2628 ± 008	476 ± 032	437 ± 028
N	= 6895	1193	1133
Vægtfylde.			
S	= -2745 ± 0006	-529 ± 0036	-988 ± 012
$R + SN'$	= -23142 ± 0014	-6998 ± 014	-1296 ± 046
N'	= 5718	10965	10946
	5.	6.	7.
	Vinsyre $C_4H_6O_6 + nH_2O$	Natriumhydrat $NaOH + nH_2O$	Kaliumhydrat $KOH + nH_2O$
Midd. Temp. $t =$	18°8 C.	17°4 C.	18°2 C.
Varmefylde.			
s	= 192 ± 0042	268 ± 011	192 ± 009
$r + sN$	= 429 ± 028	945 ± 12	898 ± 11
N	= 1188	196	3466
Vægtfylde.			
S	= -2652 ± 0011	-393 ± 0025	-343 ± 0039
$R + SN'$	= -4475 ± 0055	-7538 ± 008	-1240 ± 039
N'	= 1122	1663	3326
	8.	9.	10.
	Ammoniumhydrat $NH_4OH + nH_2O$	Chlornatrium $NaCl + nH_2O$	Chlorkalium $KCl + nH_2O$
Midd. Temp. $t =$	18°1 C.	18°3 C.	18°3 C.
Varmefylde.			
s	= 20 ± 32	241 ± 0054	172 ± 0038
$r + sN$	= 400 ± 270	553 ± 038	464 ± 031
N	= 328	1305	1772
Vægtfylde.			
S	= +29 ± 24	-430 ± 0020	-379 ± 0024
$R + SN'$	= +91 ± 22	-5932 ± 009	-7448 ± 015
N'	= 332	1136	1668

	11.	12.	13.
	Chlorammonium	Salpetersurt Natron	Salpetersurt Kali
	$NH_4Cl + nH_2O$	$NaNO_3 + nH_2O$	$KNO_3 + nH_2O$
Midd. Temp. $t =$	18°4 C.	18°3 C.	17°8 C.
Varmefylde.			
s	$= 272 \pm 007$	193 ± 0045	154 ± 0050
$r + sN$	$= 484 \pm 037$	478 ± 033	662 ± 06
N	$= 1125$	123	291
Vægtfylde.			
S	$= -1122 \pm 017$	-31518 ± 0013	-228 ± 0024
$R + SN'$	$= -1605 \pm 07$	-4299 ± 0053	-879 ± 021
N'	$= 1089$	10814	2725
	14.	15.	16.
	Salpetersur Ammoniak	Kulsurt Natron	Svovlsurt Natron
	$NH_4NO_3 + nH_2O$	$Na_2CO_3 + nH_2O$	$Na_2SO_4 + nH_2O$
Midd. Temp. $t =$	18°2 C.	18°1 C.	18°3 C.
Varmefylde.			
s	$= 247 \pm 0047$	098 ± 006	095 ± 006
$r + sN$	$= 353 \pm 020$	1062 ± 16	1025 ± 14
N	$= 590$	596	755
Vægtfylde.			
S	$= -566 \pm 0034$	-1598 ± 0015	-1392 ± 0016
$R + SN'$	$= -5052 \pm 008$	-952 ± 025	-1093 ± 030
N'	$= 529$	5425	7235
	17.	18.	19.
	Svovlsur Ammoniak	Svovlsur Magnesia	Eddikesurt Natron
	$N_2H_8SO_4 + nH_2O$	$MgSO_4 + nH_2O$	$NaC_2H_3O_2 + nH_2O$
Midd. Temp. $t =$	18°4 C.	18°5 C.	17°4 C.
Varmefylde.			
s	$= 110 \pm 0035$	101 ± 0018	255 ± 012
$r + sN$	$= 620 \pm 050$	424 ± 020	938 ± 14
N	$= 359$	2316	230
Vægtfylde.			
S	$= -215 \pm 0019$	-1492 ± 0006	-417 ± 0043
$R + SN'$	$= -967 \pm 023$	-3684 ± 0040	-1066 ± 033
N'	$= 3453$	2129	2141

De i denne Tabel bag \pm tilføjede Tal betegne Middelfejlen $\sqrt{\lambda_2}$ paa det foran \pm angivne Tal.

Bilag III.

n	Svovlsyre. $t = 17^{\circ}2 \text{ C.}$		Salpetersyre. $18^{\circ}1 \text{ C.}$		Chlorbrintsyre. $18^{\circ}3 \text{ C.}$	
	q	Q	q	Q	q	Q
7	'622 ₈	1'3751	'719	1.2042	'684	1'1105
8	'652 ₂	'3401	37	1842	'710	'0995
9	'677 ₅	'3110	53	1679	31	'0905
10	'699 ₅	1'2866	'767	1'1542	'750	1'0832
11	'718 ₅	'2657	79 ₅	426	66 ₂	769
12	35 ₂	'2476	'790 ₈	326	80 ₂	714
13	50 ₂	'2319	'801 ₂	239	'792 ₈	667
14	63 ₅	'2180	10 ₂	163	'804 ₂	626
15	'775 ₅	1'2057	'818 ₈	1'1096	'814 ₂	1'0589
16	86 ₂	1'1947	26 ₅	1'1036	23 ₂	557
17	'796 ₂	848	33 ₅	1'0982	31 ₅	528
18	'804 ₈	759	39 ₈	933	39 ₂	502
19	13 ₂	678	46 ₂	889	45 ₈	478
20	'820 ₈	1'1604	'851 ₅	1'0850	'852 ₂	1'0456
21	27 ₈	536	56 ₈	813	58 ₂	437
22	34 ₂	474	61 ₅	779	63 ₅	419
23	40 ₂	417	66 ₂	749	68 ₅	402
24	45 ₈	364	70 ₅	720	72 ₈	387
25	'850 ₈	1'1315	'874 ₅	1'0694	'877 ₂	1'0372
30	72 ₂	1'1113 ₈	'891 ₂	586	'895 ₂	314
35	'888 ₅	1'0966 ₂	'903 ₈	508	'908 ₅	272
40	'900 ₈	852 ₈	14 ₂	447	18 ₈	240
45	10 ₈	763 ₅	22 ₂	400	26 ₈	214
50	'918 ₈	1'0691 ₂	'928 ₈	1'0362	'933 ₅	1'0194
60	314	580 ₈	39 ₅	303 ₈	43 ₈	62 ₅
70	406	501 ₂	47 ₂	261 ₈	51 ₅	40 ₂
80	476	440 ₅	53 ₂	229 ₈	57 ₂	23 ₂
90	531	392 ₈	58 ₂	204 ₈	61 ₈	1'0109 ₈
100	'9576	1'0354 ₈	'961 ₈	1'0184 ₈	'965 ₅	1'0098 ₈
110	'9613	3232	5 ₂	68 ₅	68 ₅	90 ₂
120	44	3969	'967 ₈	54 ₈	70 ₈	82 ₈
130	70	2745	'970 ₂	42 ₈	731	76 ₅
140	'9693	2553	2 ₂	32 ₈	750	71 ₂
150	'9713	1'02386	'9740	1'0124 ₂	'9766	1'0066 ₅
160	30	2239	56	16 ₅	80	62 ₂
170	46	2110	70	09 ₈	'9793	58 ₈
180	60	1994	82	1'0103 ₈	'9804	55 ₅
190	72	1891	'9793	1'0098 ₅	14	52 ₅
200	'9783	1'01797	'9803	1'00935	'9823	1'0049 ₈
250	'9825 ₈	1441 ₈	41	750	58	401
300	54 ₂	1203 ₅	'9867	626	'9881	334
400	'9890 ₂	904 ₈	'9900	470	'9911	251
500	'9912 ₂	7247	19 ₅	377	28 ₅	201
1000	'99558	1'003634	'9959 ₅	1'00188 ₈	'9964 ₂	1'00100 ₈

n	Vinsyre. t = 18° C.		Natriumhydrat 17° C.		Kaliumhydrat 18° C.	
	q	Q	q	Q	q	Q
7	702	1'2978			72	1'295
8	18	2761	842	1'2412	38	68
9	33	2573	49	205	52	45
10	746	1'2409	854	1'2028	762	1'228
11	575	264	60	1'1878	72	1'210
12	682	136	65	748	82	1'196
13	782	1'2021	70	637	92	84
14	872	1'1918	74	538	798	73
15	7955	1'1826	878	1'1450	808	1'163
16	8032	741	822	372	15	55
17	105	664	855	302	22	468
18	172	594	892	238	26	398
19	232	529	922	181	32	335
20	8292	1'1470	8952	1'1129	837	1'1275
21	345	414	8982	081	42	222
22	395	363	9008	037	47	172
23	445	316	035	1'0996	51	128
24	488	272	058	959	55	085
25	8532	1'1230	9082	1'0924	859	1'1046
30	712	1'1057	182	782	76	1'0887
35	855	1'0927	262	678	892	770
40	8968	826	328	598	8998	680
45	9062	744	385	535	9088	609
50	9138	1'0677	9432	1'0484	9162	1'0551
60	262	5742	505	407	278	463
70	352	4982	565	351	365	400
80	425	4402	9608	308	435	351
90	482	3942	45	2748	9492	314
100	9528	1'03568	9678	1'02482	9535	1'0283
110	9568	258	9702	262	9575	58
120	9602	1'03002	25	1'02075	9605	37
130	28	1'02778	45	1'01918	35	19
140	55	588	62	785	58	1'0204
150	9675	1'02422	9775	1'01668	9678	1'0191
160	9695	275	88	565	9698	79
170	9712	145	9798	475	9715	68
180	26	1'02032	9808	395	28	592
190	40	1'01928	18	322	42	508
200	9752	1'01832	9828	1'01255	9755	1'01435
250	9800	475	59	1'01008	9802	1'01152
300	32	1'01233	9882	1'00841	35	1'00962
400	73	1'00929	9910	632	74	722
500	9898	746	28	506	9899	578
1000	99488	1'003748	99632	1'002538	9949	1'00290

n	Ammoniumhydrat 18°1 C.		Chlornatrium 18°3 C.		Chlorkalium 18°3 C.	
	q	Q	q	Q	q	Q
7		'92	'755	1'2465	'642	1'264
8		4	68	'2229	64	402
9		48	81	'2034	82	202
10		'955	<u>792</u>	<u>1'1871</u>	'698	1'2032
11		62	'8015	732	'713	1'1888
12		65	105	612	27	762
13		68	188	507	39	651
14		71	265	416	<u>50</u>	<u>554</u>
15		'973	'8335	1'1335	'761	1'1468
16		5	398	262	702	390
17		7	458	197	788	321
18		85	512	138	868	258
19	'99	'9795	565	086	'7945	201
20	'99	'9808	'8612	1'1037	'8015	1'1149
21	'99	18	658	1'0993	082	101
22	'995	28	698	952	142	057
23	5	35	738	915	198	1'1016
24	5	45	775	880	255	1'0978
25	<u>'995</u>	<u>'9852</u>	'8812	1'0848	'8305	1'0944
30	8	78	'8962	718	522	801
35	8	'9896	'9075	622	688	695
40	82	'9910	168	548	822	614
45	85	21	245	4905	'8928	550
50	'9988	'9929	'9308	1'04438	'9018	1'0498
60	'9992	41	405	3728	162	419
70	2	50	482	3212	268	3618
80	2	56	538	2825	348	3182
90	5	61	585	2518	415	2842
100	'9995	'9965	'9622	1'02275	'9468	1'02565
110	5	68	655	1'02072	512	2338
120	6	71	682	1'01902	552	2148
130	6	735	702	758	582	1985
140	6	755	723	635	612	1848
150	'9997	'99772	'9740	1'01527	'9635	1'01728
160	7	785	56	433	658	622
170	7	798	69	350	675	528
180	7	808	81	276	692	445
190	7	818	'9792	210	708	368
200	'9998	'99828	'9802	1'01150	'9722	1'01302
250	8	862	40	1'00922	776	1'01045
300	8	885	66	770	812	1'00872
400	'99988	'99915	'9899	578	858	656
500	'99992	32	'99185	463	'9886	525
1000	'99995	'99966	'99588	1'002322	'99428	1'002635

n	Chlorammonium. 18°4 C.		Salpetersurt Natron. 18°3 C.		Salpetersurt Kali. 17°8 C.	
	q	Q	q	Q	q	Q
7					.688	1'338
8	.747	1'0780	.747	1'2933	.708	308
9	.63	717	.59	2683	15	283
10	.778	1'0664	.7695	1'2474	.728	1'262
11	.7902	618	792	2295	38	43
12	.8015	578	882	2140	48	27
13	115	543	.7965	2004	58	132
14	208	512	.8042	1885	67	1'2008
15	.8292	1'0484	.8112	1'1779	.775	1'1898
16	368	459	178	685	83	802
17	435	437	242	599	90	712
18	498	416	298	523	796	632
19	558	398	352	453	.802	558
20	.8612	1'0381	.8402	1'1389	.808	1.1492
21	662	65	452	331	14	430
22	708	51	495	277	19	373
23	752	38	538	228	24	321
24	792	25	578	182	28	273
25	.8832	1'0314	.8615	1'1139	.833	1'1228
30	.8992	267	778	1'0966	518	1'1043
35	.9112	232	.8908	838	672	1'0907
40	208	205	.9012	740	792	802
45	285	184	098	663	895	719
50	.9348	1'01672	.9168	1'0600	.8982	1'0652
60	445	408	285	5045	.9118	549
70	518	215	372	4332	225	474
80	575	1'01068	438	3825	308	417
90	618	1'00955	495	3412	375	372
100	.9655	1'00862	.9538	1'03082	.9428	1'0336
110	685	788	575	1.02808	475	307
120	708	722	608	578	515	282
130	728	668	635	385	548	261
140	748	622	658	218	578	242
150	.9765	1'00582	.9682	1'02072	.9603	1'0227
160	778	545	.9698	1'01945	28	213
170	791	515	.9715	832	45	201
180	802	488	32	732	65	1895
190	812	462	44	642	82	1798
200	.9821	1'00438	.9756	1.01562	.9695	1'01708
250	56	352	.9802	253	755	372
300	.9880	294	34	1'01046	792	1'01145
400	.9909	221	74	1'00786	843	1'00862
500	27	177	.9899	630	873	690
1000	.99635	1.000888	.99488	1'003158	.9936	1'00346

n	Salpetersur Ammoniak.		Kulsurt Natron.		Svoilsurt Natron.	
	18°2 C.		18°1 C.		18°3 C.	
	q	Q	q	Q	q	Q
7	.736 _s	1'1661				
8	52 _s	518				
9	67 ₂	398				
10	.779 _s	1'1295				
11	.791 ₂	207	.82 _s	1'38 ₂	.76	1'42
12	.801 _s	129	2 _s	.36 ₂	6	.39 _s
13	10 _s	062	3 ₂	.34 ₂	7	.37 _s
14	19 ₂	1'1001	3 _s	.32 _s	7	.355
15	.826 _s	1'0948	.83 _s	1'30 _s	.78	1'33 _s
16	34 ₂	899	4 ₂	1'293	8	.32 _s
17	40 _s	856	4 ₂	80	8 _s	.31 ₂
18	46 _s	816	4 _s	68	9 ₂	.29 _s
19	52 ₂	780	4 _s	57	9 _s	.28 _s
20	.857 _s	1'0747	.84 _s	1'247	.79 _s	1'27 _s
21	62 _s	717	5 ₂	38	.80 ₂	6 _s
22	66 _s	689	5 _s	29	0 _s	55
23	71 ₂	663	5 _s	21	1 ₂	46
24	75 ₂	640	5 _s	13	1 ₂	38
25	.878 _s	1'0618	.860	1'206	.81 _s	1'231
30	.894 _s	525	69	1'177 ₂	3 ₂	1'199
35	.906 _s	457	77	55 ₂	4 _s	75
40	16 _s	405	84	380	55	55 _s
45	24 ₂	363	91	243	64	40 _s
50	.930 _s	1'0329 ₂	.896	1'1131	.87 ₂	1'127 _s
60	40 _s	277 _s	.906	1'0958	86	1'108 _s
70	48 _s	239 _s	14 ₂	831	.897 ₂	1'0943
80	54 ₂	211 ₂	.920 _s	733	.906 ₂	834
90	58 _s	188 _s	.926 _s	656	13 _s	747
100	.962 _s	1'0170 _s	.931 _s	1'0594	.920 _s	1'0677
110	65 _s	55 _s	6 ₂	543	26 ₂	618
120	68 _s	42 _s	.939 _s	499	30 _s	569
130	70 _s	32 ₂	.943 ₂	462	35 ₂	528
140	72 _s	22 _s	6 ₂	431	38 _s	491
150	.974 _s	1'0114 _s	.949 ₂	1'0403	.942 ₂	1'0460
160	60	07 _s	.951 _s	1'0378	45 ₂	432
170	73	1'0101 _s	3 _s	57	47 _s	408
180	85	1'0096 ₂	5 _s	38	50 _s	386
190	.9796	91 ₂	7 _s	20	.52 _s	366
200	.9806	1'00867	.959 _s	1'0305	.954 _s	1'0348
250	44	696	66 ₂	245	62 _s	280
300	.9869	581	71 ₂	204 _s	68 ₂	235
400	.9901	437	77 _s	154 _s	75 _s	176 _s
500	20 _s	351	81 _s	123 _s	80 ₂	141 _s
1000	.9959 _s	1'00175 _s	.9904	1'0062 ₂	.989 _s	1'0071 _s

n	Svovlsur Ammoniak. 18°4 C.		Svovlsurt Magnesia. 18°5 C.		Eddikesurt Natron. 17°4 C.	
	q	Q	q	Q	q	Q
7	'67 ₂	1'267			'81 ₂	1'215
8	8 ₂	53			2 ₂	'197
9	'69 ₂	40			2 ₈	'182
10	'70 ₂	1'228			'835	1'169 ₅
11	1 ₂	17			4 ₂	58 ₂
12	2 ₂	1'207			4 ₈	48 ₅
13	2 ₈	1'199			54	39 ₈
14	3 ₈	90 ₅			59	32 ₂
15	'74 ₅	1'182 ₈			'864	1'125 ₂
16	5 ₁	75 ₈			68	19 ₂
17	5 ₈	69 ₅			73	133
18	64	63 ₅			77	083
19	70	58 ₂			80	1'1036
20	'776	1'152 ₈	'744 ₈	1'2864	'884	1'0993
21	81	47 ₈	51 ₂	746	87	953
22	86	43 ₅	57 ₂	638	90 ₅	917
23	91	391	63 ₂	538	93 ₂	883
24	'796	351	68 ₅	446	96 ₂	852
25	'800	1'1312	'773 ₈	1'2360	'898 ₈	1'0823
30	20	150	'797 ₂	1'2006	'910 ₅	702
35	36 ₂	1'1023	'816 ₂	1'1745	19 ₅	613
40	49 ₅	1'0922	31 ₈	541 ₈	26 ₈	543
45	61 ₂	839	44 ₈	384 ₈	33 ₂	488
50	'870 ₈	1'0769	'856 ₂	1'1255 ₂	'938 ₅	1'0443
60	86 ₈	660	74 ₅	1'1057 ₂	46 ₈	374
70	'899 ₅	578	88 ₈	913 ₂	53 ₂	323
80	'909 ₅	514	'899 ₈	803 ₅	58 ₂	285
90	17 ₅	463	'909 ₂	717 ₅	62 ₂	255
100	'924 ₅	1'0421	'916 ₈	1'0648 ₂	'965 ₅	1'0230
110	30 ₂	386	23 ₂	591 ₂	68 ₂	210 ₂
120	35 ₂	356	28 ₈	543 ₂	70 ₅	193 ₂
130	39 ₅	331	33 ₅	502 ₅	72 ₅	178 ₈
140	43 ₂	309	37 ₈	467 ₅	74 ₅	166 ₅
150	'946 ₅	1'0290	'941 ₅	1'0436 ₈	'976 ₂	1'0155 ₅
160	49 ₅	73	44 ₈	410 ₂	77 ₅	46 ₂
170	52 ₂	57	47 ₈	386 ₅	78 ₅	37 ₈
180	54 ₅	43 ₈	50 ₅	365 ₅	79 ₈	30 ₂
190	56 ₅	31 ₈	527	346 ₅	80 ₈	23 ₅
200	'958 ₅	1'0220 ₈	'9550	1'0329 ₅	'981 ₅	1'0117 ₅
250	66 ₂	178 ₅	633	264 ₅	85 ₂	1'0094 ₅
300	71 ₅	149 ₅	690	220 ₈	87 ₈	78 ₈
400	78 ₂	113 ₂	764	166 ₅	'990 ₅	59 ₅
500	82 ₅	1'0091 ₂	810	133 ₂	23	476
1000	'9911	1'00460	'9903 ₂	1'00668	'9961 ₂	1'00239